



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A

Uitwerking Voortgangstoets 6 oktober 2006

Opgave 1

(a) De functie f heet injectief als voor alle $x, y \in D$ geldt: als $x \neq y$ dan is $f(x) \neq f(y)$ (of equivalent: als $f(x) = f(y)$ dan $x = y$).

(b) Zij $x, y \in D$ met $x < y$ vast maar willekeurig. Dan is $f_1(x) < f_1(y)$ omdat f_1 strikt stijgend is en $f_2(x) < f_2(y)$ omdat f_2 strikt stijgend is. Maar dan is ook $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) < f_1(y) + f_2(y) = (f_1 + f_2)(y)$.

Opgave 2

(a) Er moet gelden dat $x > 0$ en $x + 2 > 0$. Hieraan wordt voldaan door alle $x > 0$. Het domein is dus $[0, \infty)$.

(b) Als $f_1(x) = \log_3 x$ en $f_2(x) = \log_3(x + 2)$ dan is $f_2(x) = f_1(x + 2)$. Dus de grafiek van f_2 wordt verkregen uit de grafiek van f_1 door een horizontale verschuiving van 2 naar links.

(c) Er geldt voor elke $x > 0$:

$$\begin{aligned}y &= \log_3 x + \log_3(x + 2) = \log_3 x(x + 2) = \log_3(x^2 + 2x) \\&\iff x^2 + 2x = 3^y \iff x^2 + 2x + 1 = 3^y + 1 \\&\iff (x + 1)^2 = 3^y + 1 \iff x + 1 = \sqrt{3^y + 1} \\&\iff x = -1 + \sqrt{3^y + 1},\end{aligned}$$

voor alle $y \in \mathbb{R}$.

Opgave 3

(a) We moeten bewijzen dat $a_{n+1} < a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$ mag ook) voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Basisstap: $n = 1$. Als $n = 1$ dan is $a_{n+1} = a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} < 4 = a_1 = a_n$. De bewering is dus juist voor $n = 1$.

Inductiestap. Zij $m \in \mathbb{N}$ vast maar willekeurig en neem aan dat $a_{m+1} < a_m$ (IH). We moeten bewijzen dat $a_{m+2} < a_{m+1}$. Uit de IH en het gegeven feit dat de termen van de rij positief zijn volgt dat $\frac{1}{a_{m+1}} > \frac{1}{a_m}$. Maar dan is $-\frac{1}{a_{m+1}} < -\frac{1}{a_m}$ en dus ook $a_{m+2} = 2 - \frac{1}{a_{m+1}} < 2 - \frac{1}{a_m} = a_{m+1}$, hetgeen bewezen moest worden.

(b) Uit het gegeven feit dat de termen van de rij positief zijn volgt dat de rij naar beneden begrensd is door 0. De rij is dus dalend en naar beneden begrensd, dus convergent volgens de monotone-rijstelling. Noem de limiet L , dan is $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{L}$. Hieruit volgt dat $L^2 = 2L - 1$ dus $L^2 - 2L + 1 = (L - 1)^2 = 0$ en dus $L = 1$.

(c) Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ volgt uit de "Test for Divergence" dat de reeks divergent is.