



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE  
Afdeling Kwantitatieve Economie

---

---

Analyse A

Uitwerking Deeltentamen 30 oktober 2006

---

---

### Opgave 1

Merk eerst op dat  $4^{1-2n} \cdot 3^{n-1} \cdot 5^n = 4 \cdot (4^{-2})^n \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^n \cdot 5^n = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{16} \cdot 3 \cdot 5\right)^n = \frac{4}{3} \left(\frac{15}{16}\right)^n$ . De som van deze meetkundige reeks is  $\frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{15}{16}}{1 - \frac{15}{16}} = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$ .

### Opgave 2

Zij  $n > N$  vast maar willekeurig. Dan is  $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{2}$  en dus  $|a_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

### Opgave 3

(a) Zij  $a \neq 0$ . Omdat de rationale functie  $\frac{1}{x}$  continu is in  $x = a$  en de goniometrische functie  $\sin x$  continu is in  $x = \frac{1}{a}$ , is  $\sin \frac{1}{x}$  continu in  $x = a$  (Stewart, p. 130, Thm. 9). Omdat de rationale functie  $x^p$  continu is in  $x = a$ , is dan ook het product  $x^p \sin \frac{1}{x}$  continu in  $x = a$  (Stewart, p. 127, Thm. 4). De functie  $f_p$  is daarmee continu in elk punt verschillend van 0. Omdat verder  $0 \leq |x^p \sin \frac{1}{x}| \leq |x^p|$  en  $\lim_{x \rightarrow 0} |x^p| = 0$ , is op grond van de insluitstelling ook  $\lim_{x \rightarrow 0} |x^p \sin \frac{1}{x}| = 0$  en dus ook  $\lim_{x \rightarrow 0} x^p \sin \frac{1}{x} = 0$ . De functie  $f_p$  is dus ook continu in 0.

(b) Definieer  $g(x) = f_p(x) - 2x + 1$  voor alle  $x$ . Dan is  $g$  continu,  $g(0) = 1$  en  $g(1) = f_p(1) - 1 = \sin(1) - 1 < \sin(\frac{\pi}{2}) - 1 = 0 < 1 = g(0)$ . Op grond van de tussenwaardstelling bestaat er dus een  $c$  in  $(0, 1)$  met  $g(c) = 0$ , ofwel  $f_p(c) = 2c - 1$ .

### Opgave 4

(a) Er geldt dat  $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$ . Dan is dus  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$ .

(b) Omdat  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\sqrt{1+h}+h\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} + \sqrt{1+h}$  is  $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1+h} = \frac{1}{2} + \sqrt{1+0} = \frac{3}{2}$ .

### Opgave 5

Basisstap: Als  $n = 2$  dan is  $n^5 - n = 32 - 2 = 30$  deelbaar door 5.

Inductiestap: Zij  $m \geq 2$  vast maar willekeurig en neem aan dat  $m^5 - m$  deelbaar is door 5 (IH). Dan is  $(m+1)^5 - (m+1) = m^5 + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m + 1 - m - 1 = (m^5 - m) + 5(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m)$ . Omdat  $m^5 - m$  deelbaar is door 5 op grond van de IH en  $5(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m)$  evident deelbaar is door 5, is ook  $(m+1)^5 - (m+1)$  deelbaar door 5.