Analyse A — Uitwerking Voortgangstoets 8 december 2006

**Opgave 1**

Stewart, p.291.

**Opgave 2**

(a) Er moet gelden dat $x^2 - 1 \geq 0$ en $x - \sqrt{x^2-1} > 0$. Uit de eerste ongelijkheid volgt dat $x \leq -1$ of $x \geq 1$. Maar als $x \leq -1$, dan $x - \sqrt{x^2-1} < x < 0$. Dus moet zeker $x \geq 1$. Als $x \geq 1$, dan volgt $x > \sqrt{x^2-1}$ uit $x^2 > x^2 - 1$. Het natuurlijk domein van $f$ is dus $[1, \infty)$.
(b) Het is voldoende te laten zien dat $f'(x) \leq 0$ op $(1, \infty)$. Er geldt: $f'(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} < 0$.
(c) Omdat $f'(x) = -(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ is $f''(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$. Voor $x > 1$ is dit positief, dus $f$ is convex op $[1, \infty)$.

**Opgave 3**

Impliciet differentiëren geeft $y'e^{xy} + ye^{xy}(y + xy') = 0$. Invullen van $x = 0$ en $y = 1$ geeft $y'e^0 + 1 \cdot e^0(1+0) = y' + 1 = 0$ en dus $y' = f'(0) = -1$. Een vergelijking van de raaklijn is dan $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ofwel $y = 1 - x$.