



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A

Uitwerking Deeltentamen 15 januari 2007

Opgave 1

Er geldt dat $f(0) = 1$ en uit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot (2x+1)$ volgt dat $f'(0) = \frac{1}{2}$. Dus de lineaire benadering is $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{2}x$.

Opgave 2

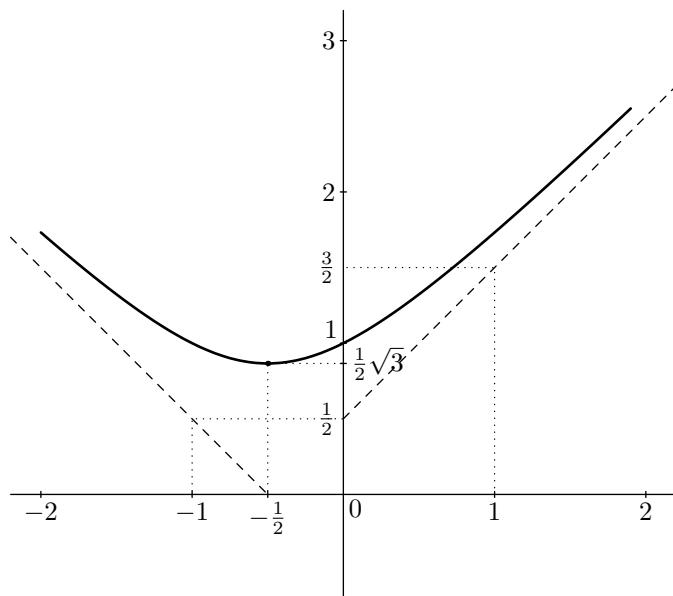
(a) Uit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot (2x+1)$ volgt dat $f'(x) > 0$ als $x > -\frac{1}{2}$ en $f'(x) < 0$ als $x < -\frac{1}{2}$. De functie is dus (strikt) stijgend op $[-\frac{1}{2}, \infty)$ en (strikt) dalend op $(-\infty, -\frac{1}{2}]$. Uit dit tekenverloop en het feit dat $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ volgt dat f een (absoluut) minimum heeft in $x = -\frac{1}{2}$ ter grootte van $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(b) Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat $f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+x+1} - (2x+1)\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}}{4(x^2+x+1)} = \frac{4x^2+4x+4 - (2x+1)^2}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Merk op dat voor $x > 0$ geldt dat $x = \sqrt{x^2}$ en dus $\sqrt{x^2+x+1} - x = (\sqrt{x^2+x+1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$. Dus $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x) = \frac{1}{2}$.

Maar dan ook $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - (x + \frac{1}{2})) = 0$ en dus is $y = x + \frac{1}{2}$ een scheve asymptoot van f .

(d)



Opgave 3

(a) $\int \sqrt{t} \ln t dt = \int \ln t d\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \ln t - \int \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \ln t - \int \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \ln t - \frac{4}{9}t^{\frac{3}{2}} + C$.

(b) Merk op dat de integraal oneigenlijk is bij 0. Uit (a) volgt dat $\int_p^1 \sqrt{t} \ln t dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \ln t - \frac{4}{9}t^{\frac{3}{2}} \right]_p^1 =$

$$-\frac{4}{9} - \frac{2}{3}p^{\frac{3}{2}} \ln p + \frac{4}{9}p^{\frac{3}{2}} \text{ en dus is } \int_0^1 \sqrt{t} \ln t \, dt = \lim_{p \downarrow 0} \left(-\frac{4}{9} - \frac{2}{3}p^{\frac{3}{2}} \ln p + \frac{4}{9}p^{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{4}{9}.$$

$$(c) \, G'(x) = \sqrt{e^{2x}} \ln(e^{2x}) \cdot (e^{2x})' = e^x \cdot 2x \cdot 2e^{2x} = 4xe^x e^{2x} = 4xe^{x+2x} = 4xe^{3x}.$$