Faculteit Economie en Bedrijfskunde
Afdeling Kwantitatieve Economie

Voortgangstoets Analyse — Vrijdag 3 december 2010, 10–11 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is *niet* toegestaan. In totaal zijn er 4 opgaven. Het maximaal aantal te behalen punten is 25 die alsvolgt verdeeld worden over de verschillende onderdelen:

1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	4a	4b
3	3	2	3	3	3	2	3	3

Ligt ieder antwoord toe. Slechts dan kunnen de maximale punten worden toegekend. Het cijfer wordt bepaald als $\frac{2}{5} \cdot$ score.

Opgave 1

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie waarvoor f' en f'' bestaan. Stel dat f'' precies één nulpunt heeft. Toon nu met behulp van de *Middelwaardestelling* aan dat f' dan hooguit 2 nulpunten heeft, en f dan hooguit 3 nulpunten.

Uitwerking Opgave 1

De Middelwaardestelling toegepast op f': voor alle $a < b$ geldt dat er een $c \in (a, b)$ is waarvoor

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(c).$$

Stel dat f' meer dan twee nulpunten zou hebben, zeg in $c_1 < c_2 < c_3$, dan garandeert de Middelwaardestelling op de intervallen (c_1, c_2) en (c_2, c_3) nulpunten van f'', hetgeen in tegenspraak met het gegeven is. Op dezelfde manier volgt uit het feit dat f' maximaal twee nulpunten heeft dat f er maximaal drie kan hebben.

Opgave 2

Gegeven is de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

(a) Bepaal de locale extremen van g. Bepaal (met behulp van het tekenschema voor de afgeleide) voor ieder extremum of het een maximum danwel minimum betreft.

(b) Laat zien dat g een horizontale asymptoot bij $y = 1$ heeft. Bepaal nu het bereik van g.

(c) Laat zien g een buigpunt heeft in $x = 0, x = -\sqrt{3}$, en $x = \sqrt{3}$. Bepaal de maximale intervallen waarop g convex/concaaf is.

(d) Schets op grond van je vorige antwoorden de grafiek van g. Geef duidelijk je werkwijze aan.

Uitwerking Opgave 2

(a) Merk op dat g een differentieerbare functie is op $\mathbb{R}$ en dat

$$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

en dat dus de kritieke punten $x = -1$ en $x = 1$ zijn. Maak het tekenschema:

$$\begin{array}{c|c|c l} + & - & + & g' \\ \hline \nearrow & \searrow & \nearrow & g \\ \multicolumn{1}{r}{-1} & \multicolumn{1}{r}{1} & & \end{array}$$

Figuur 1: Tekenschema g'

Dan volgt dat g in $x = -1$ een lokaal maximum aanneemt en in $x = 1$ een lokaal minimum. Dus de extreme waarden zijn $g(-1) = 2, g(1) = 0$.

(b) Er geldt dat

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1.$$

Dus, omdat g stijgend is op $(-\infty, -1]$, dalend op $[-1, 1]$ en weer stijgend op $[1, \infty)$, bepaalt de range $[g(1), g(-1)]$ het bereik van g.

(c) Bepaal $g''(x)$:

$$g''(x) = \frac{-4x(x^3-3)}{(1+x^2)^3} = \frac{-4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}.$$

We zien onmiddellijk dat $g''(x) = 0$ precies voor genoemde waarden van x. Verder komen deze nulpunten ook enkelvoudig voor in de ontbinding van de teller als polynoom. Dus krijgen we ook de nodige tekenwisselingen in ieder van deze waarden. Het tekenschema wordt gegeven door:

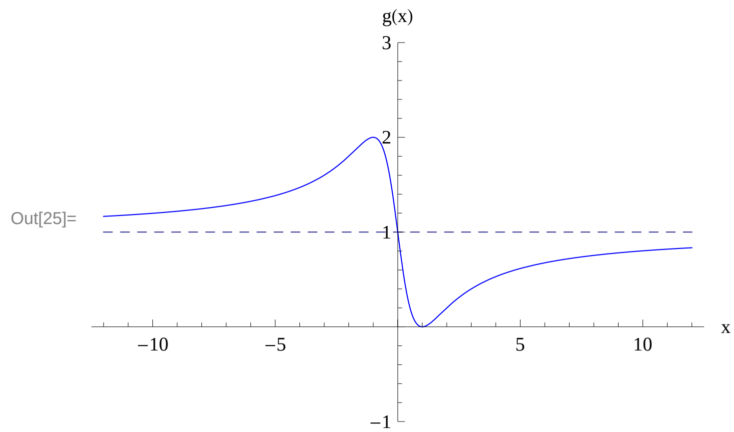
$+$	$-$	$+$	$-$	g''
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	g'

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

Figuur 2: Tekenschema g'

Hieraan zien we de intervallen waarop g convex ($g'' > 0$) danwel concaaf is ($g'' < 0$). g is convex op de intervallen $(-\infty, -\sqrt{3})$ en $[0, \sqrt{3}]$ en concaaf op $[-\sqrt{3}, 0]$ en $[\sqrt{3}, \infty)$.

(d)



Zie ommezijde!!!

Opgave 3

Bepaal zo mogelijk met behulp van de stelling van de l'Hospital:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x + x^2)}{x}$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^x + x^2\right)^{1/x}$

Uitwerking Opgave 3

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x + x^2)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}\ln(e^x + x^2)}{\frac{d}{dx}x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+2x}{e^x+x^2}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x + 2x)}{\frac{d}{dx}(e^x + x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x + 2)}{\frac{d}{dx}(e^x + 2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + 2e^{-x}} = 1.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(e^x + x^2\right)^{1/x} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\left(e^x+x^2\right)^{1/x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(e^x+x^2)/x} = e^1 = e
\end{aligned}$$

Opgave 4

Zij $k, K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee functies gegeven door $k(x) = |x| + 1$ en

$$K(x) = \int_0^{2x} k(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Bepaal $K(-1)$ en $K(1)$.

(b) Is K differentieerbaar? Zo ja, geef het functievoorschrift voor de afgeleide. Zo nee, licht toe waarom niet.

Uitwerking Opgave 4

(a)

$$\begin{aligned} K(-1) &= \int_0^{-2} (|t|+1)\,\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{0} (-t+1)\,\mathrm{d}t = -\left\{-\tfrac{1}{2}t^2+t\right\}\Big|_{-2}^{0} = -4. \\ K(1) &= \int_0^{2} (|t|+1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2} (t+1)\,\mathrm{d}t = \left\{\tfrac{1}{2}t^2+t\right\}\Big|_{0}^{2} = 4. \end{aligned}$$

(b) k is continu en dus is volgens de *Hoofdstelling van de Analyse* de functie $F : y \mapsto \int_0^y k(t)\,\mathrm{d}t$ een primitieve van k. In het bijzonder is F dus differentieerbaar. Maar dan is de samenstelling $K(x) = F(2x)$ ook differentieerbaar. Er geldt – met de kettingregel – dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(2x) = 2\cdot F'(2x) = 2(|2x|+1).$$