FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Tentamen Analyse A — woensdag 7 januari 2009, 9–12 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is *niet* toegestaan. In totaal zijn er 6 opgaven. Het maximaal aantal te behalen punten is 60 die alsvolgt verdeeld worden over de verschillende onderdelen:

1a	1b	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b
3	3	3	4	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3	4	3	4	3

Dit aantal wordt toegekend toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord. Het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{6}\cdot$ score. Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum (binnen 15 werkdagen) bij de balie van het secretariaat (kamer E3.02).

Opgave 1

(a) Geef de definitie van de afgeleide $f'(a)$ van een functie f te a.

(b) Laat met behulp van deze definitie zien dat $f'(1) = 2$ wanneer $f(x) = x^2$.

Opgave 2

Gegeven zijn functies $k_c : (0, e^1] \to \mathbb{R}$ voor $c \in \mathbb{R}$ door het voorschrift

$$k_c(x) = (\ln x)^2 + c \ln x + c.$$

(a) Bepaal k_c' en eventuele kritieke punten van k_c, voor iedere $c \in \mathbb{R}$.

(b) Stel het tekenschema van de afgeleide k_c' op en bepaal hiermee de extreme waarden van k_c, voor iedere $c \in \mathbb{R}$.

(c) Bepaal k_c'' en bijbehorend tekenschema. Voor welke c heeft k_c een buigpunt?

(d) Bepaal de maximale intervallen waarop k_c convex resp. concaaf is.

(e) Schets de grafiek van k_c voor de waarden $c = -2$ en $c = 2$. Bepaal in beide gevallen het bereik van de functie k_c.

(f) Zij $c = -2$. Laat zien dat voor deze waarde k_c inverteerbaar is, en bepaal het functievoorschrift voor de inverse.

(g) Er bestaat één punt $P(x_0, y_0)$ dat op ieder van de grafieken van k_c ligt, voor íedere c. Bepaal dit punt.

Opgave 3

(a) Bepaal $\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-1}$.

(b) Bepaal $\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln(\tan x)$.

Opgave 4

(a) Formuleer (beide delen van) de Hoofdstelling van de Analyse.

(b) Gegeven is de functie $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ door

$$H(x) = \int_x^{x^2} \arcsin\left(t^3\right)\, \mathrm{d}t.$$

Bepaal $H'(x)$ voor $x \in (-1,1)$.

(c) Toon met behulp van de *middelwaardestelling* (*Mean Value Theorem*) aan dat H op $(0,1)$ een kritiek punt heeft. Is dit het enige kritieke punt op $(-1,1)$?

Opgave 5

Beschouw nogmaals de functies k_c als in Opgave 2, met voorschrift $k_c(x) = (\ln x)^2 + c\ln x + c$.

(a) Bepaal $\int k_c(x)\, \mathrm{d}x$.

(b) Bepaal $\int_0^1 k_c(x)\, \mathrm{d}x$.

Opgave 6

(a) Bepaal met behulp van de subsitutie $u = e^{2x} + 1$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}\, \mathrm{d}x.$$

(b) Bepaal

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{2x}+1}\, \mathrm{d}x.$$

Mocht je bij (a) géén antwoord hebben, laat dan zien dat deze oneigenlijke integraal convergeert.

EINDE TENTAMEN ANALYSE A