FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, deeltentamen — maandag 27 oktober 2008, 9–11 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag wordt komend blok bekendgemaakt. Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum bij de balie van het secretariaat (kamer E3.02). Het maximaal aantal te behalen punten wordt hieronder in de tabel per onderdeel aangegeven.

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	5a	5b	5c	5d	6a	6b
3	4	4	3	4	2	4	5	3	3	4	3	3	4	3	2	3	3

Dit aantal wordt toegekend toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord. In totaal zijn er 60 punten te verdienen en het cijfer wordt bepaald als $\min\{10, \frac{1}{5} \cdot \text{score}\}$. Let wel, je hoeft niet alle vragen te maken voor een 10!

Opgave 1

(a) Geef de definitie van de limiet L van een rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Gegeven is de rij $\{c_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$. Laat met behulp van de definitie in (a) zien dat

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

(c) Bereken de som

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} + \dots$$

Uitwerking Opgave 1

(a) Een rij $\{a_n\}$ heeft limiet L als geldt dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een N bestaat zodat

$$n > N \implies |a_n - L| < \epsilon.$$

(b) Eerst doen we het klad en bepalen N zodat geldt $n > N \implies |c_n - 0| < \epsilon$.

$$|c_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^2-1}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2-1} < \epsilon \Leftrightarrow n^2 - 1 > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n^2 > 1 + \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon}}$$

Dan als je een geheel getal N hebt zodanig dat $N > \sqrt{1+\frac{1}{\epsilon}}$ (neem bijvoorbeeld $N = \left\lceil \sqrt{1+1/\epsilon} \right\rceil$, het kleinste gehele getal groter dan $\sqrt{1+1/\epsilon}$), dan geldt

$$n > N \implies |c_n - 0| < \epsilon,$$

namelijk hierboven staan tweezijdige implicatiepijlen; je kan dus ook terugredeneren.

(c) Eerst merken we op dat de gegeven som als de volgende uitdrukking

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots\right)$$

geschreven kan worden. Tussen haakjes hebben we nu een oneindige meetkundige rij met reden $-1/4$. Met behulp van de somformule voor die rij (die geldt als $|r| < 1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

kunnen we nu onze opdracht oplossen:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}\,.$$

Opgave 2

Beschouw functies $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen:

$$g(-1) = 0, g(2) = 3, \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \infty, \lim_{x\to 2^+} g(x) = \infty, \lim_{x\to -3^-} g(x) = -\infty, \lim_{x\to -3^+} g(x) = \infty.$$

(a) Schets de grafiek van een functie die aan alle bovenstaande eigenschappen voldoet.

(b) Geef het functievoorschrift van een functie die aan alle bovengenoemde eisen beantwoordt.

Uitwerking Opgave 2

(b) Als eerste poging beschouwen we één functie $\tilde{g}$ gegeven door het voorschrift

$$\tilde{g}(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2 \cdot (x+3)}\,. \tag{1}$$

We merken op dat

$$\tilde{g}(-1) = 0\,.$$

Dat is de reden waarom we $x + 1$ in de teller moeten hebben. Verder

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{g}(x) = \lim_{x\to-\infty} \tilde{g}(x) = 0\,,$$

want we hebben een grotere macht in de noemer dan in de teller. Ook

$$\lim_{x \to 2^-} \tilde{g}(x) = \lim_{x \to 2^+} \tilde{g}(x) = \infty\,,$$

omdat $x - 2$ in de noemer staat. We hebben in de noemer zelfs $(x-2)^2$ gezet om hetzelfde teken links en rechts van 2 te krijgen. En ook we hebben gecontroleerd dat het teken juist is (plus) rond punt 2! Ten slotte,

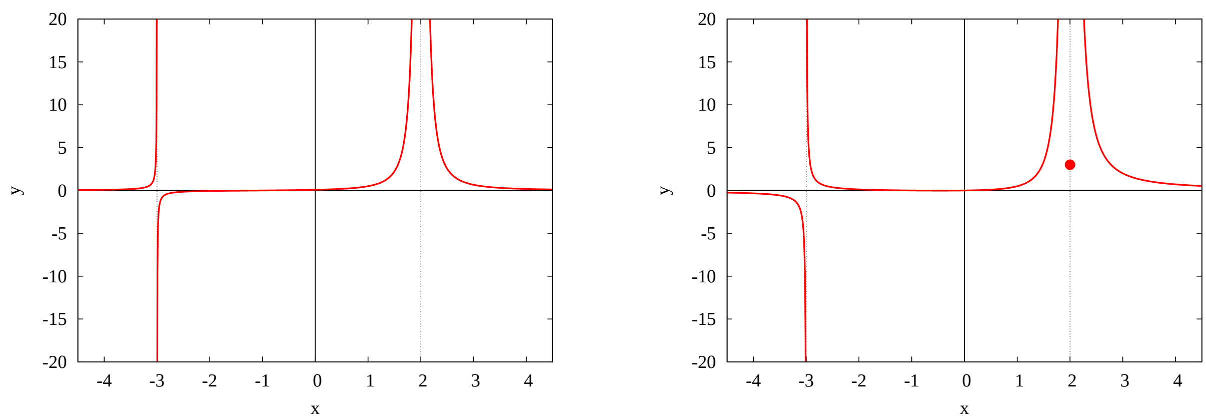
$$\lim_{x \to -3^-} \tilde{g}(x) = \infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \to -3^+} \tilde{g}(x) = -\infty\,,$$

omdat we $x + 3$ in de noemer hebben en omdat als $x < -3$ de functie positief is, en als $x > -3$ de functie negatief is.

Dus de functie $\tilde{g}$ alle noodzakelijke eigenschappen voldoet, behalve de tweede ($g(2) = 3$) en de laatste (de linker- en rechterlimieten in -3 de verkeerde tekens hebben). Om die twee problemen op te lossen, kunnen we bijvoorbeeld de functie $\tilde{g}$ met x vermenigvuldigen en afzonderlijk de waarde in $x = 2$ definiëren:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x(x+1)}{(x-2)^2 \cdot (x+3)} & \text{voor } x \neq 2 \\ 3 & \text{voor } x = 2 \end{cases} \tag{2}$$

(c) Zie de Figure 1 waar de functie $\tilde{g}$ gedefinieerd door (1) en de functie g gedefinieerd door (2) beide worden gedemonstreerd.



Figuur 1: *Een plot van een de "eerste poging", functie $\tilde{g}$ die niet alle eigenschappen voldoet (boven) en voor de mogelijk functie g als oplossing voor opgave $2a$) (beneden).*

Opgave 3

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

(a) Geef de definitie van een strikt stijgende functie.

(b) Laat met behulp van onderdeel (a) zien dat f strikt stijgend is.

(c) Beredeneer dat f inverteerbaar is. Bepaal de inverse f^{-1}.

(d) Bepaal $dom\left(f^{-1}\right)$, het domein van f^{-1}.

Uitwerking Opgave 3

(a) Een functie $f(x)$ wordt een strikt stijgende functie genoemd indien geldt dat

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)\,.$$

(b) Stel dat x_1 en x_2 zodanig dat $x_1 > x_2$. We moeten laten zien dat

$$x_1 - \sqrt{x_1^2+1} > x_2 - \sqrt{x_2^2+1} \Leftrightarrow x_1 - x_2 > \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1}\,.$$

In het geval waarin $\sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} < 0$, geldt de laatste vergelijking omdat $x_1 - x_2$ positief is. Anders, als $\sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} \geq 0$, kunnen we die vergelijking kwadrateren. Dit levert

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > x_1^2 + 1 - 2\sqrt{x_1^2+1}\sqrt{x_2^2+1} + x_2^2 + 1 \Leftrightarrow \\ -2x_1x_2 > 2 - 2\sqrt{x_1^2+1}\sqrt{x_2^2+1} \Leftrightarrow \\ \sqrt{x_1^2+1}\sqrt{x_2^2+1} > 1 + x_1x_2 \end{aligned}$$

Nog een keer: als de rechterkant, $1 + x_1x_2$, negatief is, dan dus ook de bewering dat $f(x_1) > f(x_2)$ wordt bewezen (sinds we steeds tweezijdige implicatiepijlen hadden). Anders, als $1 + x_1x_2 \geq 0$, kunnen we de vergelijking kwadrateren. Dan berekenen we

$$\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right) > 1 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 \;\Leftrightarrow\; x_1^2 + x_2^2 > 2x_1x_2 \;\Leftrightarrow\; (x_1 - x_2)^2 > 0\,.$$

De laatste vergelijking is altijd waar en dus in ieder geval $f(x_1) > f(x_2)$.

(c) Sinds f strikt monotone functie is, is f injectief. Iedere injectieve afbeelding is inverteerbaar dus ook f.

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = x - \sqrt{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} = x - y\,.$$

Maar de wortel is niet-negatief, dus y moet altijd kleiner dan of gelijk aan x zijn. En waar $y \leq x$, volgt uit de laatste gelijkheid dat

$$x^2 + 1 = x^2 - 2xy + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = y^2 - 2xy \quad \Leftrightarrow \quad 2xy = y^2 - 1\,.$$

Als $y \neq 0$ berekenen we $x = (y^2 - 1)/(2y)$ en dus wordt de inverse functie gegeven door

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}\,.$$

(d) We hebben in (c) gevonden dat $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ impliceert $x = (y^2 - 1)/(2y)$. De tweezijdige implicatie geldt alleen als $y \neq 0$ en $y \leq x$. We beschouwen de laatste bewering:

$$y < \frac{y^2 - 1}{2y}\,.$$

Als $y > 0$ dan betekent dat $2y^2 \leq y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 \leq -1$. Dat is niet waar en dus y kan niet een positieve waarde aannemen. Als $y < 0$ dan betekent de vergelijking dat $2y^2 \geq y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 \geq -1$ en dat is altijd waar.

Dus alleen voor positieve y kunnen we x vinden zodat $y = f(x)$. Het domein van de f^{-1}, $D_{f^{-1}} = B_f = (0, \infty)$.

Opgave 4

(a) Geef de definitie van de afgeleide $k'(a)$ van een functie k in a.

(b) Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als in de vorige opgave door $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Laat met behulp van de definitie in onderdeel (a) zien dat $f'(0) = 1$.

(c) Bepaal zonder f^{-1} te differentiëren $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

Uitwerking Opgave 4

(a)

$$k'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{k(a+h) - k(a)}{h}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - \sqrt{h^2+1} - (-1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(h+1) - \sqrt{h^2+1}}{h} \cdot \frac{(h+1) + \sqrt{h^2+1}}{(h+1) + \sqrt{h^2+1}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(h+1)^2 - \left(\sqrt{h^2+1}\right)^2}{h\left((h+1) + \sqrt{h^2+1}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - h^2 - 1}{h\left((h+1) + \sqrt{h^2+1}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h\left((h+1) + \sqrt{h^2+1}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(h+1) + \sqrt{h^2+1}} \\
&= \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

(c) Er geldt $f(0) = -1$ en dus $\left(f^{-1}\right)(-1) = 0$ en dan

$$\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(-1)\right)} = \frac{1}{f(0)} = 1.$$

Opgave 5

Gegeven is $g(x) = e^x + x$.

(a) Bepaal de lineaire benadering van g in $a = 1$.

(b) Beschouw de vergelijking $g(x) = e^y + \dfrac{x}{y}$. Rond de oplossing $(x, y) = (1, 1)$ beschrijft deze vergelijking variabele y als differentieerbare functie van x zodat $y = y(x)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de oplossingskromme in $P(1, 1)$.

(c) Laat zien dat de vergelijking $g(x) = x^2 + 2$ een positieve oplossing heeft.

(d) Laat zien dat de vergelijking $g(x) = x^2 + 2$ geen negatieve oplossing heeft.

Uitwerking Opgave 5

(a) De lineaire benadering wordt gegeven door

$$L^{g,1}(x) = g(1) + g'(1)(x-1) = (e+1) + (e+1)(x-1) = (e+1)x.$$

(b) Impliciet differentiëren levert

$$e^x + 1 = \frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}\left(e^y + \frac{x}{y}\right) = y' \cdot e^y + \frac{1}{y} - y' \cdot \frac{x}{y^2}$$

Substitueer $(x, y(x)) = (1, 1)$:

$$e^1 + 1 = y'(1) \cdot e^1 + \frac{1}{1} - y'(1) \cdot \frac{1}{1^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{e}{e-1}.$$

De raaklijn heeft vergelijking $\ell : y = \frac{e}{e-1}x + b$, punt $P(1, 1)$ ligt op de lijn dus $1 = \frac{e}{e-1} \cdot 1 + b$, $b = 1 - \frac{e}{e-1} = \frac{e-1-e}{e-1} = \frac{1}{1-e}$. Dus $\ell : y = \frac{e}{e-1}x + \frac{1}{1-e}$.

(c) Bekijk de functie $p(x) = g(x) - (x^2 + 2)$. Dan is p een continue functie omdat g continu is en ook $x \mapsto x^2 + 2$. Merk op dat $p(0) = e^0 + 0 - 0^2 - 2 = -1 < 0$ en dat $p(1) = e^1 + 1 - 1^2 - 2 = e - 2 > 0$. De doorlopendheidstelling zegt nu dat er in $(0, 1)$ een getal c te vinden is waarvoor $p(c) = 0$. Maar dit houdt in dat $g(c) = c^2 + 2$. Dus er is minstens 1 positieve oplossing – je zou ook kunnen aantonen dat deze oplossing uniek is..

(d) Er is geen negatieve oplossing. Voor alle $x < 0$ geldt dat $e^x < 1$ en dus

$$g(x) = e^x + x < 1 + x < 1 < 2 = \min_{y \in \mathbb{R}} \; y^2 + 2.$$

Opgave 6

Gegeven is een begrensde functie $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Geef van onderstaande beweringen aan of ze juist of onjuist zijn. Indien onjuist, geef aan waarom.

(a) De functie $x \mapsto x \cdot h(x)$ is continu in $a = 0$.

(b) Stel $h'(0)$ bestaat en dat de functie g niet differentieerbaar is in 0. Dan bestaat de afgeleide van het product $x \mapsto h(x)\, g(x)$ in $a = 0$ niet.

Uitwerking Opgave 6

Deze opgave borduurt voort op opgaven die op het werkcollege behandeld zijn. Specifiekere relaties worden hieronder aangegeven.

(a) De bewering is juist. Omdat h begrensd is bestaan er $m, M \in \mathbb{R}$ zodat $m \leq h(x) \leq M$ voor alle x. Er is dus M^* zodat $|h(x)| \leq M^*$. Maar dan

$$0 \leq |x \cdot h(x)| = |x| \cdot |h(x)| \leq |x| M^*.$$

Dus volgt met de insluitstelling via $\lim_{x\to} |x| M^* = 0$ dat $\lim_{x\to 0} |x \cdot h(x)| = 0$, oftewel $\lim_{x\to 0} x \cdot h(x) = 0$. Merk op dat deze opgave praktisch de volgende is: laat zien dat de functie $w(x) = x \sin(1/x)$ voor , $x \neq 0, w(0) = 0$ continu is in 0.

(b) Dit is niet juist. Neem bijvoorbeeld $h(x) = x$ en $g(x) = |x|$. Dan bestaat $g'(0)$ niet maar toch is $x \mapsto h(x)g(x)$ differentieerbaar in 0 met afgeleide 0. Deze functie is aan bod gekomen op het werkcollege.

EINDE DEELTENTAMEN ANALYSE A
