



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE  
Afdeling Kwantitatieve Economie

---

---

Analyse A, uitwerkingen Voortgangstoets 1

vrijdag 26 september 2008

---

---

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag is uiterlijk binnen twee weken bekend. Teruggave van het werk volgt op het hoorcollege. Uitwerkingen van deze toets worden op Blackboard gepubliceerd. Beoordeling: iedere vraag telt even zwaar. Een maximale score wordt alleen toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord.

### Opgave 1

In onderstaande onderdelen moet je iedere stap verantwoorden

- (a) Bepaal  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2 + 3)}{n^2}$ .
- (b) Bepaal  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{1 + n^2}}{3n - \sqrt[3]{1 + n^2}}$ .

### Uitwerking Opgave 1

- (a) Omdat  $-1 \leq \sin(n^2 + 3) \leq 1$  voor alle  $n$  geldt

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin(n^2 + 3)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Omdat  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$  geldt op grond van de insluitstelling dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2 + 3)}{n^2} = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{1+n^2}}{3n - \sqrt[3]{1+n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n + \sqrt{1+n^2}}{n}}{\frac{3n - \sqrt[3]{1+n^2}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}}{3 - \frac{\sqrt[3]{1+n^2}}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1+n^2}{n^2}}}{3 - \sqrt[3]{\frac{1+n^2}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}}{3 - \sqrt[3]{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \sqrt[3]{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}} \right)} = \frac{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}}{3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + 1 \right)}}{3 - \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} \right)}} = \frac{2 + 1}{3 + 0} = 1.\end{aligned}$$

## Opgave 2

Gegeven is functie  $f$  door het functievoorschrift

$$f(x) = \ln \left( \frac{x-1}{x+2} \right).$$

- Bepaal het domein  $D_f$  van  $f$ .
- Laat zien dat  $f$  injectief is, dwz 1-1.
- Concludeer dat  $f$  inverteerbaar is. Bepaal de inverse van  $f^{-1}$  van  $f$ .
- Wat is het domein van  $f^{-1}$ ,  $D_{f^{-1}}$ ?
- Is  $f$  monotoon? Leg uit.

## Uitwerking Opgave 2

- $D_{\ln} = (0, \infty)$  dus moet gelden dat  $\frac{x-1}{x+2} \in (0, \infty)$  oftewel

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+2} > 0 &\Leftrightarrow (x-1 > 0 \wedge x+2 > 0) \text{ of } (x-1 < 0 \wedge x+2 < 0) \\ &\Leftrightarrow (x > 1 \wedge x > -2) \text{ of } (x < 1 \wedge x < -2) \\ &\Leftrightarrow x > 1 \text{ of } x < -2.\end{aligned}$$

Dus  $D_f = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

(b) De functie is injectief, dwz uit  $f(x_1) = f(x_2)$  volgt  $x_1 = x_2$ , namelijk door direct rekenwerk:

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{x_1-1}{x_1+2}\right) = \ln\left(\frac{x_2-1}{x_2+2}\right) &\implies e^{\ln\left(\frac{x_1-1}{x_1+2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x_2-1}{x_2+2}\right)} \\
 &\implies \frac{x_1-1}{x_1+2} = \frac{x_2-1}{x_2+2} \\
 &\implies (x_1-1)(x_2+2) = (x_2-1)(x_1+2) \\
 &\implies x_1x_2 - x_2 + 2x_1 - 2 = x_2x_1 - x_1 + 2x_2 - 2 \\
 &\implies -x_2 + 2x_1 = -x_1 + 2x_2 \\
 &\implies -x_2 + 2x_1 = -x_1 + 2x_2 \\
 &\implies 3x_1 = 3x_2 \implies x_1 = x_2.
 \end{aligned}$$

Iets anders:  $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+2-2-1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{3}{x+2}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{x+2}\right)$ . De functies

$$\begin{aligned}
 x &\mapsto x+2 \\
 y &\mapsto -\frac{3}{y} \\
 z &\mapsto 1-z \\
 u &\mapsto \ln(u)
 \end{aligned}$$

zijn alle injectief, dus ook de samenstelling

$$x \mapsto x+2 \mapsto -\frac{3}{x+2} \mapsto 1 - \frac{3}{x+2} \mapsto \ln\left(1 - \frac{3}{x+2}\right) = f(x).$$

(c) Iedere injectieve afbeelding is inverteerbaar dus ook  $f$ .

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln\left(1 - \frac{3}{x+2}\right) \\
 &\Leftrightarrow e^y = e^{\ln\left(1 - \frac{3}{x+2}\right)} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+2} = e^y \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{x+2} = 1 - e^y \Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{1}{1 - e^y} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3}{1 - e^y} - 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{1 - e^x} - 2
 \end{aligned}$$

(d) Domein van  $D_{f^{-1}} = B_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(e) De functie is niet monotoon, namelijk de functie is stijgend op  $(-\infty, -2)$  en stijgend op  $(1, \infty)$  maar niet stijgend op het gehele domein. Neem bijvoorbeeld  $x_1 = -3 \in (-\infty, -2)$  en  $x_2 \in (1, \infty)$  dan  $f(x_1) = \ln\left(\frac{-3-1}{-3+2}\right) = \ln(4) > 0 > \ln\left(\frac{1}{4}\right) = f(x_2)$ . Dus de functie is niet monotoon.

### Opgave 3

(a) Geef de definitie van limiet van een rij.

Gegeven is de rij  $\{a_n\} = \left\{2 - \frac{1}{n+1}\right\}$ .

(b) Laat met behulp van de definitie zien dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

- (c) Gegeven is een functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  waarvoor  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 3$ . Geldt dan ook  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ ?  
 Illustreer je antwoord eventueel met een schets van een grafiek.

### Uitwerking Opgave 3

- (a) Een rij  $\{a_n\}$  heeft limiet  $L$  als geldt dat voor iedere  $\epsilon > 0$  er een  $N$  bestaat zodat

$$n \geq N \implies |a_n - L| < \epsilon.$$

- (b) Eerst doen we het klad en bepalen  $N$  zodat geldt  $n \geq N \implies |a_n - 2| < \frac{1}{37}$ .

$$|a_n - 2| < \frac{1}{37} \Leftrightarrow \left| 2 - \frac{1}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{37} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{37} \Leftrightarrow n > 37 - 1.$$

Dan als  $N = 37 - 1$ , dan geldt  $n \geq N \implies |a_n - 2| < \frac{1}{37}$ , namelijk hierboven staan tweezijdige implicatiepijlen; je kan dus ook terugredeneren. Nu het verhaal voor algemene  $\epsilon > 0$  – verander daartoe  $\frac{1}{37}$  door  $\epsilon$ , ofwel 37 door  $\frac{1}{\epsilon}$ . Zo bepalen we  $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$ . Dan geldt voor  $n \geq N$  dat

$$n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \epsilon \Leftrightarrow |a_n - 2| = \frac{2}{n+1} \leq \epsilon.$$

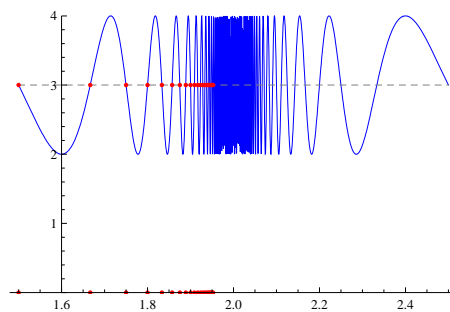
- (c) In het college hebben we de functie  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  bekeken en de rij  $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ . Er geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0.$$

Echter de limiet  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  bestaat niet. Hier kunnen we iets soortgelijks doen, met een kleine aanpassing van de functie. Neem  $f(x) = 3 + \sin\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$ . Dan voor alle  $n \in \mathbb{N}$

$$f(a_n) = 3 + \sin\left(\frac{\pi}{2 - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)}\right) = 3 + \sin((n+1)\pi) = 3 \text{ dus } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 3.$$

Maar net als tevoren bestaat  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  niet. Dus het antwoord luidt: nee.



Figuur 1: Een plot van de grafiek van  $f$ , de rijen  $\{a_n\}$  en  $\{f(a_n)\}$ .