FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, voortgangstoets 1 blok 1 — vrijdag 21 september 2007

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = |x| - |2x-1|$. Schets de bijbehorende grafiek op het interval $[-1, 1]$.

Uitwerking Opgave 1

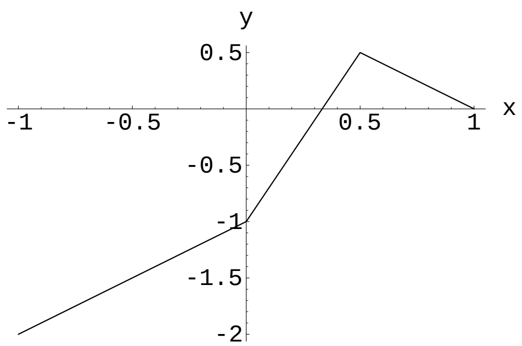
Er geldt

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{als } 2x-1 < 0, x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{als } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dus volgt

$$f(x) = \begin{cases} -x-(-2x+1) = x-1 & \text{als } x < 0 \\ x-(-2x+1) = 3x-1 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x-(2x-1) = -x+1 & \text{als } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Opgave 2

Gegeven is de functie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ door $g(x) = (2x-1)(1+x)$.

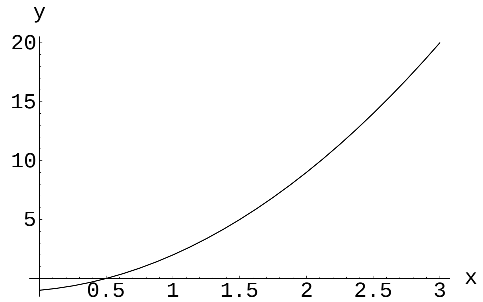
(a) Bepaal het bereik van de functie, $ran(g)$. Is g surjectief?

(b) Toon aan dat g injectief is.

(c) Bepaal het functievoorschrift voor de inverse g^{-1} van g.

Uitwerking Opgave 2

(a) g is een kwadratische functie. De grafiek is dus een gedeelte van de parabool met dal te $x = -\frac{1}{4}$. Maar dan wordt de minimale waarde van g aangenomen in $x = 0$, $g(0) = -1$. Dan $ran(g) = [-1, \infty)$. Zie de grafiek hieronder:



In het bijzonder is g dus niet surjectief, de waarde -2 wordt bijvoorbeeld niet aangenomen.

(b) g is een stijgende functie, en dus injectief.

(c) Los de vergelijking $y = g(x)$ op naar x:

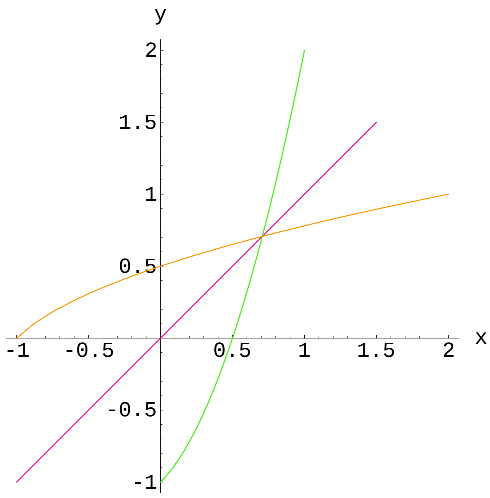
$$\begin{aligned}
(2x-1)(x+1) = y &\iff 2x^2 + x - 1 = y \\
&\iff 2x^2 + x - 1 - y = 0 \\
&\iff x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot -(1+y)}}{2 \cdot 2} \\
&\iff x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8(1+y)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9+y}}{4}
\end{aligned}$$

Aangezien $dom(g) = [0, \infty)$ valt er één oplossing af, en verkrijgen we

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9+y}$$

Het functievoorschrift van de inverse functie luidt dus

$$g^{-1}(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9+x}$$



Zie hierboven een plaatje van de grafieken van g en g^{-1}, welke elkaars gespiegelde zijn in de lijn $y = x$.

Opgave 3

Los op: $\ln(x+2) - \ln(x-1) = 1$

Uitwerking Opgave 3

$$\begin{aligned}
\ln(x+2) - \ln(x-1) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \ln(e) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-1} = e \Longleftrightarrow x+2 = (x-1)\,e \\
&\Longleftrightarrow \quad 2+e = ex - x \Longleftrightarrow (2+e) = (e-1)x \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{2+e}{e-1}
\end{aligned}$$

Noodzakelijke voorwaarde voor oplossing: $x > 1$. Contrôle: $2+e > -1+e$ dus $x = \frac{2+e}{e-1} > 1$, deze voldoet.

Opgave 4

Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3+2n)\left(\frac{1}{n}+4n\right)}{2n^2}$.

Uitwerking Opgave 4

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(3+2n)\left(\frac{1}{n}+4n\right)}{2n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+12n+\frac{2n}{n}+8n^2}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n^3}+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}+4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+4 \\
&= \frac{3}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3+6\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2+4 \\
&= 0+0+0+4=4
\end{aligned}
$$