FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, uitwerkingen Voortgangstoets 2 — vrijdag 28 november 2008

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag is uiterlijk binnen twee weken bekend. Teruggave van het werk volgt op het hoorcollege. Uitwerkingen van deze toets worden op Blackboard gepubliceerd. Beoordeling: iedere vraag telt even zwaar. Een maximale score wordt alleen toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord.

Opgave 1

Bepaal onderstaande limieten en verantwoord je stappen.

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-\sin(2x)}{x\sin^2 x}\,.$$

(b)

$$\lim_{x\downarrow 0}\Big(\tan x\cdot\ln(\sin x)\Big)\,.$$

(c)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Uitwerking Opgave 1

Alle drie limieten proberen we met behulp van de regel van de l'Hôpital op te lossen. Daarom controleren we in elke stap dat zowel de teller als de noemer differentieerbaar is in het limiet punt, en dat er een onbepaalde vorm in dit punt bestaat.

(a)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-\sin(2x)}{x\sin^2 x}= && \Big/\text{ onbepaalde vorm van het type } \tfrac{0}{0}\ \Big/\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(2x)}{x\cdot 2\sin x\cos x+\sin^2 x}= && \Big/\text{vereenvoudiging: } 2\sin x\cos x=\sin(2x)\ \Big/\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(2x)}{x\sin(2x)+\sin^2 x}= && \Big/\text{ onbepaalde vorm van het type } \tfrac{0}{0}\ \Big/\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+4\sin(2x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2\sin x\cos x}= && \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+4\sin(2x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+\sin(2x)}= && \Big/\text{ onbepaalde vorm van het type } \tfrac{0}{0}\ \Big/\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+8\cos(2x)}{4\cos(2x)-4x\sin(2x)+2\cos(2x)}= && \Big/\text{ geen onbepaalde vorm! }\Big/\\
&=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\,.
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\downarrow 0}\Big(\tan x\cdot\ln(\sin x)\Big) = && \big/\ \text{onbepaalde vorm van het type } 0\cdot(-\infty)\ \big/\\
&= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}} = && \big/\ \text{onbepaalde vorm van het type } \tfrac{-\infty}{\infty}\ \big/\\
&= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = &&\\
&= \lim_{x\downarrow 0}\big(-\cos x\sin x\big) = && \big/\ \text{geen onbepaalde vorm!}\ \big/\\
&= 0 &&
\end{aligned}$$

Voor de tweede stap hebben we de afgeleide van $1/\tan x$ nodig. De directe berekening levert

$$\Big(\frac{1}{\tan x}\Big)' = \Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)' = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

(c)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = && \big/\ \text{geen onbepaalde vorm!}\ \big/\\
&= 0\,. &&
\end{aligned}$$

(De noemer $x-\sqrt{x^2-1}$ gaat naar $-\infty$ als x naar $-\infty$ gaat. Als de noemer van de breuk heel erg klein wordt, nadert de breuk tot 0.)

Opgave 2

In onderstaande onderdelen moet je iedere stap verantwoorden.
Beschouw de functie k gegeven door

$$k(x) = x\big(\ln x\big)^2\,,$$

(a) Bepaal alle kritieke punten van k. Stel het bijbehorende tekenschema op.

(b) Bepaal de (lokale) extrema van k. Heeft deze functie een globaal minimum? Leg je antwoord uit. Zo ja, bepaal een punt waarvoor de functie k dit globale minimum aanneemt.

(c) Bepaal de maximale intervallen waarop k convex is en waar de functie concaaf is.

Uitwerking Opgave 2

(a) Het domein van de functie k is $D_k = (0,\infty)$. De afgeleide is gegeven door

$$k'(x) = x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)^2 = \ln x(2+\ln x)\,.$$

De afgeleide bestaat voor alle $x\in D_k$ en heeft twee nulpunten:

$$\ln x = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = 1$$

en

$$2+\ln x = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = e^{-2}$$

Deze twee punten zijn de kritieke punten van de functie k. Merk op dat $e^{-2} < e^0 = 1$. Voor grote waarden van x is de afgeleide $k'(x)$ positief. Daarom krijgen we het volgende tekenschema:

x	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
f'	> 0	< 0	> 0
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

(b) De functie k kan alleen lokale extrema hebben in de kritieke punten en op de grens van het domein. Omdat in het punt 0 de functie k niet gedefinieerd is, kan 0 niet een kritiek punt zijn. Met behulp van het tekenschema zien we dat de functie in e^{-2} een lokaal maximum en in 1 een lokaal minimum aanneemt. De waarden van de functie k zijn

$$k(e^{-2}) = 4e^{-2} \qquad \text{(een lokaal maximum)}$$

en

$$k(1) = 0 \qquad \text{(een lokaal minimum).}$$

Uit het tekenschema is het duidelijk dat 1 een globaal minimum van k is op het interval (e^{-2}, ∞). Als we bijvoorbeeld rechts van 1 kijken, dan is daar de functie stijgend en dus kan deze niet kleiner dan in 1 worden.

Of in het punt 1 het globale minimum van k bereikt wordt, hangt daarnaast af van het gedrag van k op de linker grens van het domein, in het punt 0. We kunnen de limiet van de functie k in 0 berekenen met behulp van de regel van de l'Hôpital. Er geldt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 0} k(x) &= \lim_{x\downarrow 0} x\cdot(\ln x)^2 = && \Big/ \text{ onbepaalde vorm van het type } 0\cdot(\infty) \Big/ \\
&= \lim_{x\downarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = && \Big/ \text{ onbepaalde vorm van het type } \tfrac{\infty}{\infty} \Big/ \\
&= \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = && \\
&= \lim_{x\downarrow 0} -2x\cdot\ln x = && \Big/ \text{ onbepaalde vorm van het type } 0\cdot(-\infty) \Big/ \\
&= \lim_{x\downarrow 0} -2\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = && \Big/ \text{ onbepaalde vorm van het type } \tfrac{-\infty}{\infty} \Big/ \\
&= \lim_{x\downarrow 0} -2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = && \Big/ \text{ geen onbepaalde vorm! } \Big/ \\
&= 0
\end{aligned}$$

Omdat de functie k stijgend is voor $x < e^{-2}$, kan deze niet kleiner dan 0 worden op het interval $(0, e^{-2})$.

We concluderen dat in het punt 1 de functie k inderdaad het globale minimum aanneemt. (Merk op dat het feit dat $k(0)$ niet gedefinieerd is van belang is.)

(c) De tweede afgeleide van k is

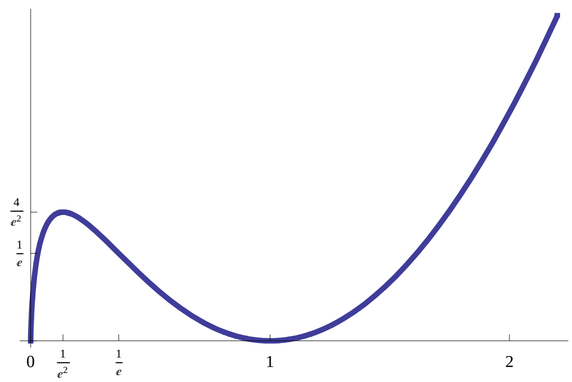
$$k''(x) = \frac{2+\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x} = 2\frac{1+\ln x}{x}\,,$$

en gedraagt zich als volgt:

$$\begin{aligned}
k''(x) < 0 &\quad\iff\quad x < e^{-1} \\
k''(x) = 0 &\quad\iff\quad x = e^{-1} \\
k''(x) > 0 &\quad\iff\quad x > e^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Een enkel buigpunt van k is e^{-1} met de waarde $k(e^{-1}) = e^{-1}$. De functie is concaaf op het interval $(0, e^{-1})$ en de functie is convex op het interval (e^{-1}, ∞).

Zie figuur 1 voor de grafiek van k.



Figuur 1: *Een plot van de grafiek van k.*

Opgave 3

(a) Geef de definitie van een *oneven* functie. Illustreer je antwoord met twee schetsen: één voor een oneven functie, en één voor de functie die niet oneven is.

(b) Zij f een oneven functie en $a > 0$. Vereenvoudig zo mogelijk de volgende uitdrukking:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Motiveer je antwoord. (Merk op dat de functie f willekeurig is.)

(c) Stel dat de oneven functie g differentieerbaar is. Bewijs dat voor elke $b > 0$ er een getal $c \in (-b, b)$ bestaat zodanig dat

$$g'(c) = \frac{g(b)}{b}\,.$$

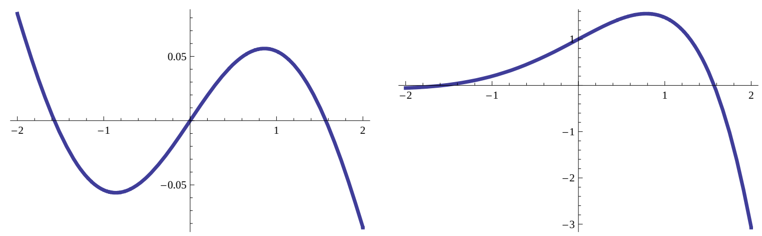
(Hint: de *Middelwaardestelling* (*Mean Value Theorem*) is, onder andere, misschien een goed hulpmiddel in je bewijs).

Uitwerking Opgave 3

(a) Een functie f heet oneven als:

$$f(x) = -f(-x) \tag{1}$$

voor alle x uit het domein. De grafiek van de oneven functie is puntsymmetrisch ten opzichte van de oorsprong, dat wil zeggen dat als je de grafiek f spiegelt ten opzichte van de oorsprong, je dezelfde grafiek krijgt. Zie figuur 2 voor één voorbeeld van een oneven functie, en één voorbeeld van de functie die niet oneven is.



Figuur 2: *Schets van een oneven functie (links) en niet oneven functie (rechts).*

(b) Het antwoord is dat (als deze integraal bestaat)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dat kan eenvoudig worden gezien uit de eigenschap van de grafiek van de oneven functie samen met de grafische interpretatie van de integraal als de oppervlakte tussen de functie en de horizontale as.

Het optioneel bewijs gebruikt de definitie van de integraal en vergelijking (1). Neem de verdeling van $[-a, a]$ met $2n + 1$ punten:

$$-a = x_{-n} < x_{-(n-1)} < \cdots < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$$

zodanig dat $x_n = -x_{-n}$, $x_{n-1} = -x_{-(n-1)}$, enz. en zodanig dat de afstand tussen twee opeenvolgende punten gelijk is. (Deze afstand is dan in feit gelijk aan $\Delta = a/n$). De integraal is gelijk aan

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} f(x_i)\Delta\,.$$

Maar voor elke i hebben we $x_i = x_{-i}$. Uit (1) volgend dan $f(x_i) = -f(x_{-i})$ en de som is 0.

(c) Pas de middelwaardestelling toe de functie f aan het interval $[-b, b]$. De stelling zegt dat er een punt $c \in (-a, a)$ bestaat zodanig

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(-b)}{b - (-b)} = \frac{2g(b)}{2b} = \frac{g(b)}{b}\,.$$

EINDE VOORTGANGSTOETS 2 ANALYSE A