FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, voortgangstoets 1 blok 2 — vrijdag 23 november 2007

Opgave 1

Bepaal de afgeleiden van de volgende functies in het aangegeven punt. Vereenvoudig je antwoord zover als mogelijk is.

(a) $f(x) = 2^{2^x}, a = 1$

(b) $g(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}, a = 0.$

Uitwerking Opgave 1

(a) Maak hier gebruik van de kettingregel, $f(x) = g(h(x))$ met $g(u) = 2^u$ en $h(x) = 2^x$. Dan volgt met $u = h(x)$

$$f'(x) = g'(u) \cdot h'(x) = (\ln 2 \cdot 2^u) \cdot (\ln 2 \cdot 2^x) = \ln^2 2 \cdot 2^x \cdot 2^{2^x} = \ln^2 2 \cdot 2^{x+2^x}.$$

Dus $f'(1) = \ln^2 2 \cdot 2^{1+2} = 8 \ln^2 2$.

(b) Maak hier gebruik van de quotiëntregel en het feit dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx} \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} g'(0) &= \ldots \frac{nat - \tan}{n^2} \ldots = \left. \frac{\arccos x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \cdot -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^2 x} \right|_{x=0} \\ &= \frac{\arccos 0 + \arcsin 0}{\arccos^2 0} = \frac{\frac{1}{2}\pi + 0}{\frac{1}{4}\pi^2} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Opgave 2

Zij $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie waarvoor geldt dat $K(0) = 3$ en $K'(0) = 1$. De functie $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $h(x) = K(2 \ln x)$.

(a) Laat zien dat $h'(1) = 2$. Bepaal de lineaire benadering van h in $a = 1$.

(b) Hoeveel procent neemt de functiewaarde $h(x)$ bij benadering toe als de variabele x van 1 toeneemt met 2 procent tot 1.02?

Uitwerking Opgave 2

(a) Met de kettingregel vinden we

$$h'(x) = K'(2\ln x) \cdot \frac{2}{x}$$

en dus $h'(1) = K'(2 \cdot \ln 1) \cdot \frac{2}{1} = 2K'(0) = 2$. Verder $h(1) = K(1 \cdot \ln 1) = K(0) = 3$. Dus wordt de lineaire benadering van h in $a = 1$ gegeven door

$$L(x) = h(1) + h'(1)(x-1) = 3 + 2(x-1).$$

(b) Een toename van de x-coördinaat vanuit $a = 1$ met 2% betekent dat $\frac{\Delta x}{a} = 0.02$. Dan geldt, met $a = 1$ en $\Delta h = h(a + \Delta x) - h(a)$ dat

$$\frac{\frac{\Delta h}{h(a)}}{0.02} = \frac{\frac{\Delta h}{h(a)}}{\frac{\Delta x}{a}} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \cdot \frac{a}{h(a)} \approx h'(a) \cdot \frac{a}{h(a)} = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

Dus de relatieve stijging van de functiewaarde h is

$$\frac{\Delta h}{h(a)} = 0.02 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\%.$$

Opgave 3

Beschouw de vergelijking

$$x^3 + xy + y^3 = 8x + 8. \tag{1}$$

Rondom de oplossing $(x, y) = (0, 2)$ definieert bovenstaande vergelijking de variabele y als (differentieerbare) functie van x. Bepaal $y'(0)$.

Uitwerking Opgave 3

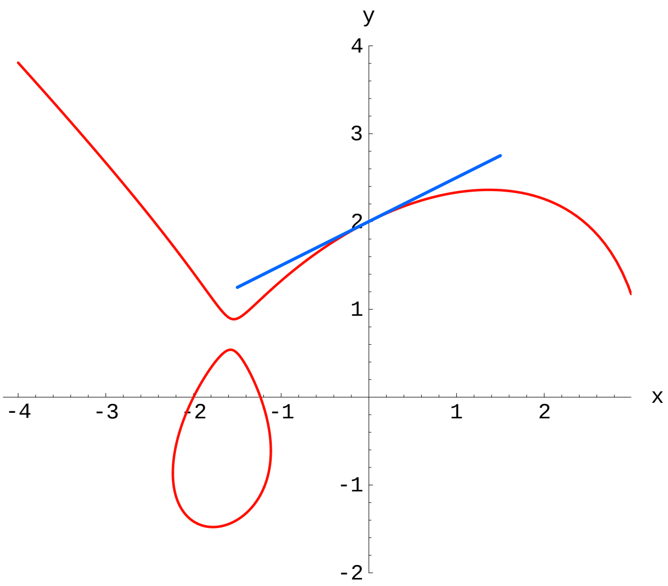
Met impliciet differentiëren vinden we via $y = y(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + xy + y^3\right) = \frac{d}{dx}(8x+8) \Leftrightarrow 3x^2 + y + xy' + 3y^2 \cdot y' = 8$$

Substitueer het punt $(0, y(0)) = (0, 2)$ in de vergelijking dan krijgen we

$$3 \cdot 0^2 + 2 + 0 \cdot y'(0) + 3 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = 8 \Leftrightarrow y'(0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

```
In[61]:= jaja = ImplicitPlot[x^3 + x y + y^3 == 8 x + 8, {x, -4, 13},
            PlotRange → {-2, 4}, PlotStyle → {Thickness[0.004], Hue[0.01]},
            AxesLabel → {"x", "y"}, PlotPoints → 300, DisplayFunction → Identity];
         zozo = Plot[2 + 1/2 x, {x, -1.5, 1.5}, PlotStyle -> {Thickness[0.005], Hue[0.6]},
            AxesLabel → {"x", "y"}, DisplayFunction → Identity];
         together = Show[jaja, zozo, ImageSize → 400, DisplayFunction → $DisplayFunction]
         Export["c:\wiskunde\analysea\vgt\vgt3plot1.eps", together]
```




```
Out[63]= - Graphics -

Out[64]= c:\wiskunde\analysea\vgt\vgt3plot1.eps
```

Opgave 4

Gegeven is de functie $k(x) = 2|x^2 + x| - x^2$.

(a) Bepaal de kritieke punten van k.

(b) Bepaal de minimale en maximale waarde van k op het interval $[-2, 1]$.

Uitwerking Opgave 4

(a) Kritieke punten van k zijn die waarden van x waarvoor $k'(x) = 0$ óf dat $k'(x)$ niet bestaat. Schrijf k eerst een beetje anders

$$k(x) = \begin{cases} 2(x^2 + x) - x^2 = x^2 + 2x & \text{als } x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash(-1, 0) \\ -2(x^2 + x) - x^2 = -3x^2 - 2x & \text{als } x^2 + x < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0). \end{cases}$$

De functie k is in $x = 0$ en $x = -1$ niet differentieerbaar. Stel dat de afgeleide in $x = 0$ wèl bestaat. Dan zowel $k'(0) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x\right)\big|_{x=0} = 2$ als $k'(0) = \frac{d}{dx}\left(-3x^2 - 2x\right)\big|_{x=0} = -2$, tegenspraak. Net zo kan een tegenspraak voor $x = -1$ afleiden. Verdere kritieke punten vinden we door nulpunten van de afgeleide te vinden,

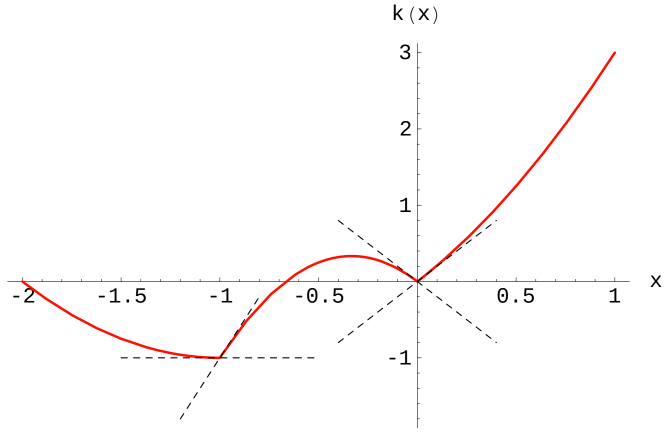
$$k'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{als } x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 0] \\ -6x - 2 & \text{als } x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Dus we vinden twee nulpunten, te weten bij $x = -\frac{1}{2}$ en $x = -\frac{1}{3}$. Dus de verzameling kritieke punten is $\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0\right\}$.

(b) k is een continue functie, dus neemt deze een maximale en een minimale waarde aan op het interval $[-1, 2]$. Om deze waarden te bepalen hoeven we alleen de waarden van de functie te vergelijken in de kritieke punten en de randpunten. Dan volgt uit $f(0) = 0, f(-1) = -1, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}, f(2) = 8$ dat het maximum gelijk is aan 8 en het minimum is -1. Hieronder de grafiek met *Mathematica*:

In[113]:=

```
f[x_] = 2 Abs[x^2 + x] - x^2;
plotfunc = Plot[f[x], {x, -2, 1}, AxesLabel → {"x", "k(x)"}, PlotStyle →
    {Thickness[0.004], Hue[0.01]}, ImageSize → 400, DisplayFunction → Identity];
plotlijn1 = Plot[{2 x, -2 x}, {x, -0.4, 0.4},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.01, 0.01}], Dashing[{0.01, 0.01}], Hue[0.6]},
  DisplayFunction → Identity]
plotlijn2 = Plot[{-1 + 4 (x + 1)}, {x, -1.2, -0.8},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.01, 0.01}], Dashing[{0.01, 0.01}], Hue[0.6]},
  DisplayFunction → Identity]
plotlijn3 = Plot[{-1}, {x, -1.5, -0.5},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.01, 0.01}], Dashing[{0.01, 0.01}], Hue[0.6]},
  DisplayFunction → Identity]
Export["c:\wiskunde\analysea\vgt\vgt3plot2.eps", Show[plotfunc, plotlijn1,
  plotlijn2, plotlijn3, DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → 400]]
```



Out[117]=

```
c:\wiskunde\analysea\vgt\vgt3plot2.eps
```