FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A — Uitwerking Deelentamen 26 maart 2007

Opgave 1

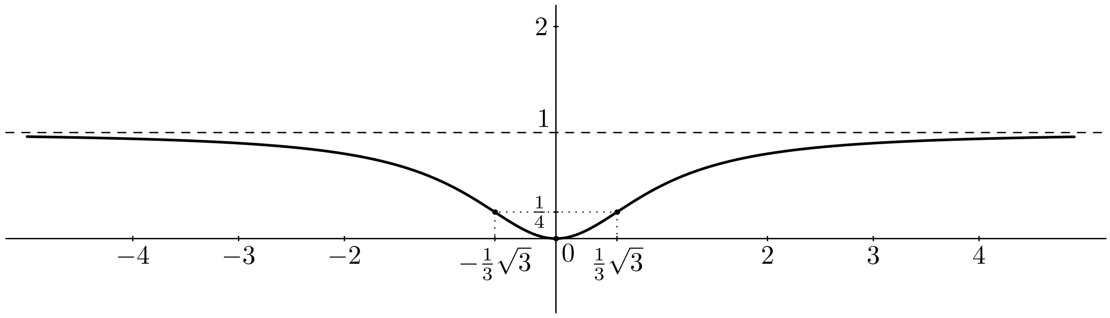
Uit $f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ volgt dat $f'(1) = \frac{1}{2}$. De lineaire benadering is dus $y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x$.

Opgave 2

(a) Uit $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ volgt dat $f'(x) > 0$ als $x > 0$ en $f'(x) < 0$ als $x < 0$. De functie is dus (strikt) stijgend op $[0,\infty)$ en (strikt) dalend op $(-\infty, 0]$. Uit dit tekenverloop en het feit dat $f'(0) = 0$ volgt dat f een (absoluut) minimum heeft in $x = 0$ ter grootte van $f(0) = 0$. (Dat $f(0) = 0$ een absoluut minimum is volgt overigens ook rechtsstreeks uit het feit dat $f(x) > 0$ voor alle $x \neq 0$.)

(b) Uit $f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$ volgt dat $f''(x) = 0$ als $1 - 3x^2 = 0$ dus als $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dit impliceert dat $f'(x) < 0$ als $x < -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ of $x > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $f'(x) > 0$ als $-\frac{1}{3}\sqrt{3} < x < \frac{1}{3}\sqrt{3}$. De functie is dus concaaf op de intervallen $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,]$ en $[\,\frac{1}{3}\sqrt{3}, \infty)$ en convex op het interval $[\,\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,]$. De punten $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{4})$ zijn dus buigpunten van f.

(c) Er geldt dat $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. De lijn $y = 1$ is dus een horizontale asymptoot. Er zijn geen verticale asymptoten omdat $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. De grafiek wordt dus:



Opgave 3

(a) Substitueer $u = \sqrt{x}$, dan is $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ dus $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2du$. Dan is $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\cos u\,du = 2\sin u + C = 2\sin\sqrt{x} + C$.

(b) Omdat $0 \notin \mathrm{dom}(f)$ is de integraal oneigenlijk bij 0, zodat $\int_0^{\frac{1}{4}\pi^2} f(x)\,dx = \lim_{a\downarrow 0}\int_a^{\frac{1}{4}\pi^2} f(x)\,dx = \lim_{a\downarrow 0}[2\sin\sqrt{x}]_a^{\frac{1}{4}\pi^2} = \lim_{a\downarrow 0}(2\sin\frac{1}{2}\pi - 2\sin\sqrt{a}) = 2 - 0 = 2$.

(c) Er geldt dat $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}[2\sin\sqrt{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty} 2\sin\sqrt{b} - 2\sin 1$ niet bestaat.