



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A

Uitwerking Tentamen 26 maart 2007

Opgave 1

(a) Het functievoorschrift is alleen niet zinvol wanneer de noemer $1 - e^x = 0$, dus als $x = 0$. Het domein is dus $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

(b) Er geldt dat $y = \frac{1+e^x}{1-e^x} \iff y(1-e^x) = y - ye^x = 1 + e^x \iff y - 1 = ye^x + e^x = e^x(y+1) \iff e^x = \frac{y-1}{y+1} \iff x = \ln \frac{y-1}{y+1}$ voor elke $x \neq 0$ en elke y waarvoor $\frac{y-1}{y+1} > 0$, dus elke y met $y > 1$ of $y < -1$. De inverse functie is dus $f^{-1}(y) = \ln \frac{y-1}{y+1}$ en $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y > 1 \text{ of } y < -1\}$ (zie Wekenschema, Aandachtspunten Week 2).

Opgave 2

Basisstap: $n = 1$. Als $n = 1$, dan is $\sum_{k=1}^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln 3 = \ln(n+2)$.

Inductiestap: zij $m \geq 1$ vast maar willekeurig en neem aan dat $\sum_{k=1}^{m+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(m+2)$.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{m+2} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(m+3)$. Er geldt: $\sum_{k=1}^{m+2} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \stackrel{\text{IH}}{=} \ln(m+2) + \ln \frac{m+3}{m+2} = \ln(m+3)$.

Opgave 3

(a) Stewart, p.291.

(b) Op grond van de Middelwaardstelling bestaat er een $c \in (-3, 3)$ zodat $f(3) - f(-3) = f'(c)(3 - (-3)) = 6f'(c)$. Maar dan is $f'(c) \leq 2$ en dus $f(3) - f(-3) = 6f'(c) \leq 12$ en dus $f(3) \leq 12 + f(-3) = 5$.

Opgave 4

(a) Er geldt dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2}{2(x^2+1)} - \frac{x^2+1}{2(x^2+1)}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$.

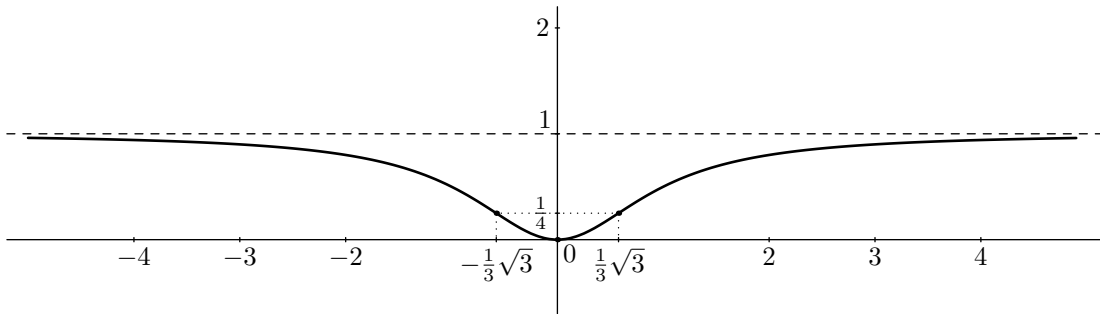
(b) De lineaire benadering is $y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x$.

Opgave 5

(a) Uit $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ volgt dat $f'(x) > 0$ als $x > 0$ en $f'(x) < 0$ als $x < 0$. De functie is dus (strikt) stijgend op $[0, \infty)$ en (strikt) dalend op $(-\infty, 0]$. Uit dit tekenverloop en het feit dat $f'(0) = 0$ volgt dat f een (absoluut) minimum heeft in $x = 0$ ter grootte van $f(0) = 0$. (Dat $f(0) = 0$ een absoluut minimum is volgt overigens ook rechtsstreeks uit het feit dat $f(x) > 0$ voor alle $x \neq 0$.)

(b) Uit $f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$ volgt dat $f''(x) = 0$ als $1 - 3x^2 = 0$ dus als $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$. Dit impliceert dat $f'(x) < 0$ als $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ of $x > \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ en $f'(x) > 0$ als $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$. De functie is dus concaaf op de intervallen $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}]$ en $[\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}, \infty)$ en convex op het interval $[-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}]$. De punten $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}, \frac{1}{4})$ zijn dus buigpunten van f .

(c) Er geldt dat $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$. De lijn $y = 1$ is dus een horizontale asymptoot. Er zijn geen verticale asymptoten omdat $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. De grafiek wordt dus:



Opgave 6

(a) Substitueer $u = \sqrt{x}$, dan is $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ dus $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2du$. Dan is $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin \sqrt{x} + C$.

(b) Omdat $0 \notin \text{dom}(f)$ is de integraal oneigenlijk bij 0, zodat $\int_0^{\frac{1}{4}\pi^2} f(x) dx = \lim_{a \downarrow 0} \int_a^{\frac{1}{4}\pi^2} f(x) dx = \lim_{a \downarrow 0} [2 \sin \sqrt{x}]_a^{\frac{1}{4}\pi^2} = \lim_{a \downarrow 0} (2 \sin \frac{1}{2}\pi - 2 \sin \sqrt{a}) = 2 - 0 = 2$.

(c) Er geldt dat $\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [2 \sin \sqrt{x}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \sin \sqrt{b} - 2 \sin 1$ niet bestaat.