FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, deeltentamen — maandag 26 oktober 2009, 9–11 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag wordt komend blok bekendgemaakt. Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum bij de balie van het secretariaat (kamer E3.02). Het maximaal aantal te behalen punten wordt hieronder in de tabel per onderdeel aangegeven.

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b	6c
2	4	4	2	4	3	3	3	2	4	4	3	3	4	2	3

Dit aantal wordt toegekend indien er sprake is van een **gemotiveerd** en juist antwoord. In totaal zijn er 50 punten te verdienen en het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5} \cdot$ score.

Opgave 1

(a) Geef de definitie van een oneindige limiet van een functie f in een punt a, dwz

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\,.$$

(b) Laat met behulp van onderdeel (a) zien dat

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty\,.$$

Uitwerking Opgave 1

(a) De definitie van *een oneindige limiet* van een functie in een punt luidt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \text{voor iedere } M \text{ bestaat } \delta > 0 \text{ zó, dat } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M\,.$$

(b) We zullen hier laten zien dat $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$, met behulp van de definitie gegeven in (a). Als klad, nemen we aan dat gegeven $M > 0$ en vinden dat

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > M \quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2 < \frac{1}{M} \quad\Leftrightarrow\quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}}\,.$$

Dan voor $M > 0$ kiezen we $\delta = 1/\sqrt{M}$. Als we boven hadden laten zien, voor $|x-1| < \delta$ geldt $|1/(1-x)^2| > M$. We concluderen dat aan de definitie van oneindige limiet is voldaan.

Opgave 2

Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\,.$$

(a) Bepaal het domein en het bereik van f.

(b) Laat $g = f \circ f$, de samengestelde functie van f met zichzelf. Vind het functievoorschrift voor g.

(c) Bepaal het domein en het bereik van g. Hint: houd rekening met onderdeel (a).

Uitwerking Opgave 2

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Om het bereik te vinden stellen we voor dat $f(x) = y$, dwz

$$\frac{x}{x+1} = y \;\Leftrightarrow\; x = y(x+1) \;\Leftrightarrow\; x = yx + y \;\Leftrightarrow\; x(1-y) = y\,.$$

We kunnen nu overeenkomstige x vinden voor elke $y \neq 1$. Daarom $B_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. We merken ook op dat we de inverse functie hebben gevonden:

$$x = \frac{y}{1-y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}\,. \tag{1}$$

(b) $g(x) = f \circ f$ en zo

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}\,,$$

waarin de laatste stap voor elke $x \neq -1$ gedaan kan worden.

(c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$. Het voorschrift van g in deel (b) laat zien dat $-1/2$ niet tot het domein van g behoort. Daarnaast behoort -1 ook niet tot het domein van g, omdat f in -1 niet is gedefinieerd.

Het bepalen van het bereik van g, B_g is lastiger. We zullen laten zien dat $B_g = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}\}$. Beschouwen we het voorschrift van g om te vinden dat

$$\frac{x}{2x+1} = y \;\Leftrightarrow\; x = y(2x+1) \;\Leftrightarrow\; x = 2yx + y \;\Leftrightarrow\; x(1-2y) = y\,.$$

We kunnen nu precies één x vinden voor elke $y \neq \frac{1}{2}$, zodat $g(x) = y$ en dat is $x = \frac{y}{1-2y}$. Als $y = \frac{1}{2}$ dan is er niet een dergelijke x en dus $\frac{1}{2} \notin B_g$. Verder wisten we al dat de waarde $x = -1 \notin D_g$. Merk op dat

$$\left.\frac{x}{2x+1}\right|_{x=-1} = 1 \neq \frac{1}{2}.$$

Kortom, er is precíes één x zodat $\frac{x}{2x+1} = 1$ en dat is $x = -1$. Maar omdat deze niet toegelaten is, namelijk $-1 \notin D_g$, neemt g de waarde 1 niet aan. Conclusie $B_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Opgave 3

Bepaal de volgende limieten:

(a) $$\lim_{x\to -5} \frac{x^3+3x^2-10x}{x^2-25}\,.$$

(b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+3}}{3x-5}\,.$$

(c) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} e^{\tan(2x)}\,.$$

Uitwerking Opgave 3

(a) $$\lim_{x\to -5} \frac{x^3+3x^2-10x}{x^2-25} = \lim_{x\to -5} \frac{x(x^2+3x-10)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to -5} \frac{x(x+5)(x-2)}{(x-5)(x+5)} =$$
$$= \lim_{x\to -5} \frac{x(x-2)}{x-5} = \frac{(-5)(-7)}{-10} = -\frac{35}{10}\,.$$

(b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+3}}{3x-5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-x+3}}{\frac{1}{x}(3x-5)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{x^2-x+3}}{\left(\frac{3x-5}{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2-x+3}{x^2}}}{\left(3-\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{1-\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{x^2}}}{3-\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5}{x}}$$
$$= \frac{-\sqrt{1-0+0}}{3-0} = -\frac{1}{3}.$$

(c) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \tan(2x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} e^{\tan(2x)} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Opgave 4

(a) Geef de definitie van de afgeleide $z'(c)$ van een functie z in a.

Gegeven is

$$z(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 1 \\ ax+b & x > 1\,. \end{cases}$$

(b) Vind de coefficiënten a en b zodat de functie $z(x)$ differentieerbaar op $\mathbb{R}$ is. Motiveer je antwoord.

(c) Is de functie die je in onderdeel (b) hebt gevonden twee keer differentieerbaar op $\mathbb{R}$? Motiveer je antwoord.

Uitwerking Opgave 4

(a) Zij k de functie gedefinieerd op een open interval I, en $a \in I$. De afgeleide van de functie k in punt a is de limiet van het differentiequotiënt, dwz

$$k'(a) = \lim_{x \to c} \frac{k(x) - k(a)}{x - a}\,, \tag{2}$$

als deze limiet bestaat. Een equivalente beschrijving luidt

$$k'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{k(a+h) - k(a)}{h}\,. \tag{3}$$

(b) Beide functies x^3 en $cx+d$ zijn voor elke c en d differentieerbaar op $\mathbb{R}$. Daarom is de functie k, die stuksgewijs gedefinieerd is, ook differentieerbaar in ieder punt, behalve misschien in het punt 1, waarin twee stukjes bij elkaar komen. Opdracht luidt dus: vind c en d zodanig dat de functie k in 1 differentieerbaar is, oftewel $k'(1)$ bestaat. Nu geldt dat

$$k'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} \text{ bestaat } \Leftrightarrow \lim_{x \downarrow 1} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} \text{ bestaan.}$$

Dus $k'(1)$ bestaat precies wanneer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} cx + d \bigg|_{x=1} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^3 \bigg|_{x=1} \Leftrightarrow c = 3.$$

Verder, omdat k differentieerbaar is, is deze ook continu in 1. Dus moet gelden dat $\lim_{x \to 1} k(x) = k(1)$ oftewel $\lim_{x \downarrow 1} k(x) = \lim_{x \uparrow 1} k(x) = k(1)$. Dat betekent dat $1 = 3 \cdot 1 + d$, en dus $d = -2$.

(c) De afgeleide van de functie

$$z(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ 3x - 2 & x > 1\,. \end{cases}$$

is gegeven door

$$z'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 1 \\ 3 & x > 1\,. \end{cases}$$

Deze functie is niet in 1 differentieerbaar. De tweede afgeleide in 1 (als deze bestaat) is de afgeleide van de afgeleide functie in 1, welke gegeven wordt gegeven als

$$z''(1) = \lim_{x \to 1} \frac{z'(x) - z'(1)}{x - 1}\,.$$

Bereken nu de linker- en rechterlimiet in 1 – deze zouden bij differentieerbaarheid aan elkaar gelijk moeten zijn:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{z'(x) - z'(1)}{x-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 3x^2 \bigg|_{x=1} = 6$$

en

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{z'(x) - z'(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3-3}{x-1} = 0\,.$$

Omdat de linker- en rechterlimieten niet gelijk zijn, concluderen we dat de afgeleide van de functie z' in 1 niet bestaat, en daarmee is de functie z niet tweemaal differentieerbaar.

Opgave 5

Gegeven is de functie $k(x) = x + (x-1)\sin(\sin x)$.

(a) Bepaal de lineaire benadering van k in het punt π.

(b) Laat zien dat de vergelijking $k(x) = \frac{\pi}{2}$ een positieve oplossing heeft.

Uitwerking Opgave 5

(a) Bij definitie wordt de lineaire benadering van k in π gegeven als lineaire functie door het volgende voorschrift

$$L(x) = g(\pi) + g'(\pi)(x - \pi)\,.$$

Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(x) = 1 + \sin(\sin x) + (x-1)\cos(\sin x)\cos x\,,$$

en daarom $g'(\pi) = 1 + \sin 0 + (\pi - 1)\cos 0 \cos \pi = 1 + (\pi - 1)\cdot 1 \cdot (-1) = 2 - \pi$, en $g(\pi) = \pi + (\pi - 1)\sin(0) = \pi$ Ten slotte, de lineaire benadering is

$$L(x) = \pi + (2 - \pi)(x - \pi)\,.$$

(b) We beschouwen de functie $k(x) - \frac{\pi}{2}$ en passen de Bolzano-Weierstrass stelling (tussenwaardestelling) toe op het interval $[0, \pi]$. We hebben

$$\left(k(x) - \frac{\pi}{2}\right)\bigg|_{x=0} = k(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0\,,$$

en

$$\left(k(x) - \frac{\pi}{2}\right)\bigg|_{x=\pi} = k(\pi) - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} > 0\,.$$

Omdat k continu is, en dus ook $x \mapsto k(x) - \frac{\pi}{2}$ geldt volgens de Bolzano-Weierstrass stelling dat er een punt $c \in (0, \pi)$ bestaat zodanig dat $g(c) - \frac{\pi}{2} = 0$. Met andere woorden is c dan de positieve oplossing die gevraagd wordt.

Opgave 6

(a) Geef de definitie voor het begrip *begrensde verzameling*. Geef één voorbeeld van een verzameling die begrensd is, en één voorbeeld van een verzameling die onbegrensd is.

(b) Geef de definitie voor het begrip *begrensde functie*.

(c) "Elke stijgende functie f gedefinieerd op een begrensd interval I is begrensd". Is deze bewering juist of onjuist? Geef aan waarom.

Uitwerking Opgave 6

(a) Getallen verzameling V is *begrensd* als er twee getallen bestaan, m en M, zodanig dat voor elke $x \in V$ geldt $m \leq x \leq M$. (m is een ondergrens van V en M is een bovengrens van V.) Interval $[0, 1]$ is een voorbeeld van een begrensde verzameling. $\mathbb{R}$ of $(0, \infty)$ zijn onbegrensde verzamelingen.

(b) Een functie wordt *begrensde functie* genoemd, wanneer de verzameling van de waarden van deze functie begrensd is.

(c) De uitwerking is niet juist en een tegenvoorbeeld is de functie $\tan x$ op de interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De verzameling $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is begrensd, maar de beeldverzameling van de functie, $\mathbb{R}$, is niet begrensd.

Merk op dat de uitwerking juist is voor de *gesloten* verzameling $I = [a, b]$. In dit geval is de stijgende functie op de interval $[a, b]$ is altijd groter dan $f(a)$ en kleiner dan $f(b)$. De verzameling van de waarden van de functie heeft als ondergrens $f(a)$ en bovengrens $f(b)$.

EINDE DEELTENTAMEN ANALYSE A