



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, deeltentamen

Uitwerkingen

maandag 1 november 2010, 9–11 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag wordt komend blok bekendgemaakt. Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum bij de balie van het secretariaat (kamer E3.02). Het maximaal aantal te behalen punten wordt hieronder in de tabel per onderdeel aangegeven.

1a	1b	1c	2a	2b	3	4a	4b	4c	5a	5b	5c
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Dit aantal wordt toegekend indien er sprake is van een **gemotiveerd** en juist antwoord.

Merk op dat je alle stellingen die in de hoorcolleges of in het Stewart boek waren bewezen mag gebruiken. Je hoeft deze stellingen niet te bewijzen, maar je moet erg duidelijk laten zien wat de stelling zegt en waarom kun je die gebruikt.

In totaal zijn er 36 punten te verdienen en het cijfer wordt bepaald als $\frac{10}{36} \cdot \text{score}$.

Opgave 1

Gegeven is de functie g door het functievoorschrift

$$g(x) = \ln \left(\frac{\pi - x}{\pi - 2x} \right).$$

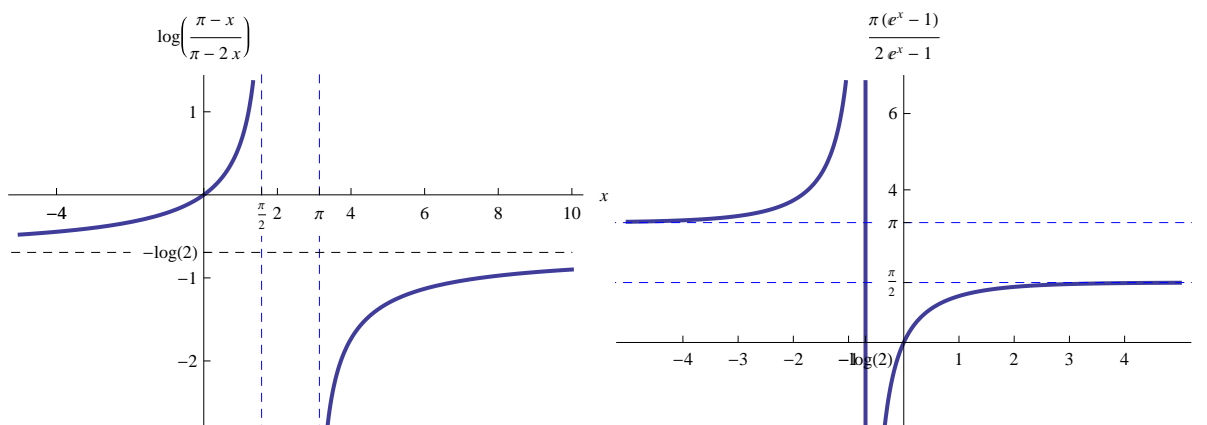
- Bepaal het natuurlijk (dwz grootste mogelijk) domein D_g van g .
- Vind het functievoorschrift voor de inverse functie van g .
- Bepaal het domein en het bereik van de inverse functie, g^{-1} .

Uitwerking Opgave 1

- Om het domein te bepalen lossen we de volgende ongelijkheid op:

$$\begin{aligned} \frac{\pi - x}{\pi - 2x} > 0 &\Leftrightarrow (\pi - x > 0 \text{ en } \pi - 2x > 0) \text{ of } (\pi - x < 0 \text{ en } \pi - 2x < 0) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x < \frac{\pi}{2} \right) \text{ of } (x > \pi). \end{aligned}$$

Conclusie: $D_g = (-\infty, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \infty)$.



Figuur 1: Grafieken van respectievelijk g (links), en g^{-1} (rechts). Deze zijn elkaars gespiegelde in de lijn $\ell : y = x$.

- (b) Om de inverse functie te vinden beschouwen we de vergelijking $g(x) = y$ en uitdrukken x als de functie van y :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\pi - x}{\pi - 2x}\right) = y &\Leftrightarrow \frac{\pi - x}{\pi - 2x} = e^y \Leftrightarrow \pi - x = (\pi - 2x)e^y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(2e^y - 1) = \pi(e^y - 1). \end{aligned} \quad (1)$$

In het geval dat $2e^y - 1 \neq 0$, vinden we dat $x = \pi(e^y - 1)/(2e^y - 1)$. Daarom is het voorschrift van de inverse functie gegeven door

$$g^{-1}(x) = \pi \frac{e^x - 1}{2e^x - 1}.$$

- (c) Het domein van de inverse functie, g^{-1} , bestaat uit alle punten van het bereik van g , dwz. waarden y zodanig dat de vergelijking $g(x) = y$ een oplossing heeft.

Alle stappen in (1) zijn equivalent, maar om x uit te drukken moeten we aannemen dat $2e^y - 1 \neq 0$. Dat levert $e^y \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \neq \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Daarom alle reële getallen behalve $-\ln 2$ behoren tot het bereik van de functie g .

Conclusie: het domein van de inverse functie is $D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

Het bereik van de inverse functie is hetzelfde als het domein van functie g ,

$$B_{g^{-1}} = D_g = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right).$$

Zie Figuur 1 voor de illustratie van de grafieken van g and g^{-1} .

Opgave 2

Bepaal de volgende limieten:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x^2 - x - 2|}.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right).$$

Uitwerking Opgave 2

- (a) Als $x = 2$ in de teller zowel in noemer invullen wordt, is de resultaat 0. Daarom de quotiënt-regel van de limiet moeten we hier niet gebruiken. We proberen dan de term $x - 2$ zowel in de teller als in de noemer om te krijgen.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x^2 - x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{|(x - 2)(x + 1)|}.$$

Merk op dat dicht bij het punt 2 links de functie $(x - 2)(x + 1)$ negatieve waarden neemt. Daar geldt dat $|(x - 2)(x + 1)| = -(x - 2)(x + 1)$. We vervolgen:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{|(x - 2)(x + 1)|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{-(x - 2)(x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x + 1} = -\frac{4}{3}.$$

- (b) Zowel de eerste als de tweede wortel hebben geen limiet. Namelijk beide gaan naar $+\infty$. Maar “ $\infty - \infty$ ” is de onbepaalde vorm, dwz., deze limiet kan bestaan of niet. We passen dan de standaard procedure (“truc”) toe:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \end{aligned}$$

Om deze limiet te bepalen moeten we zowel teller als noemer op x tot de grootste macht delen. Merk op dat voor positieve x geldt dat $\sqrt{x^2} = x$. We krijgen:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}(3x)}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}.$$

De laatste limiet kunnen we met behulp van de standaard regels berekenen, omdat zowel de limiet van de teller en de limiet van de noemer bestaat en de limiet van de noemer niet 0 is.

Het antwoord is: $\frac{3}{2}$.

Opgave 3

Bepaal $h'(2)$ waar $h(x) = x^{2x}$.

Uitwerking Opgave 3

We moeten hier de techniek van het logaritmische differentiëren toepassen. Beschouw de functie

$$g(x) = \ln h(x) = \ln(x^{2x}) = 2x \ln x.$$

Daarna (met ketting-regel toegepast op $g(x) = \ln h(x)$)

$$g'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)},$$

en ook (met product-regel toegepast op $g(x) = 2x \ln x$)

$$g'(x) = 2 \ln x + \frac{2x}{x} = 2(\ln x + 1).$$

Samenvattend:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = 2(\ln x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad h'(x) = h(x)2(\ln x + 1) = 2x^{2x}(\ln x + 1)$$

en $h'(2) = 2 \cdot 2^4 \cdot (\ln 2 + 1) = 32(\ln 2 + 1)$.

Opgave 4

Gegeven is de kromme door het voorschrift

$$2(x^4 + y^3) = 9xy.$$

Beschouw rond het punt $(1, 2)$ de grafiek van deze kromme als de grafiek van een functie $y = y(x)$.

(a) Laat zien dat

$$y'(x) = \frac{8x^3 - 9y}{9x - 6y^2}.$$

(b) Bepaal de lineaire benadering van de functie $y = y(x)$ in het punt $x = 1$. Met andere woorden, bepaal het voorschrift van de raaklijn aan de gegeven kromme door het punt $(1, 2)$.

(c) Bepaal de waarde van de tweede orde afgeleide van de functie $y = y(x)$ in het punt $x = 1$.

Uitwerking Opgave 4

(a) Met functie $y(x)$ wordt de kromme voorschrift als volgt:

$$2(x^4 + (y(x))^3) = 9xy(x).$$

Differentiatie van de laatste vergelijking levert:

$$2(4x^3 + 3(y(x))^2 y'(x)) = 9xy'(x) + 9y(x).$$

We vinden dat (we gebruiken y op de plaats van $y(x)$)

$$(6y^2 - 9x)y'(x) = 9y - 8x^3 \Leftrightarrow y'(x) = \frac{9y - 8x^3}{6y^2 - 9x}.$$

(b) De lineaire benadering van de functie $y(x)$ in het punt $x = 1$ is, bij definitie, de functie

$$l(x) = y(1) + y'(x)(x - 1) = 2 + y'(1)(x - 1) = 2 + \frac{8 - 9 \cdot 2}{9 - 6 \cdot 2^2}(x - 1) = 2 + \frac{2}{3}(x - 1).$$

Merk op (voor het onderdeel (c)) dat $y'(1) = 2/3$.

(c) We differentiëren de uitdrukking voor de eerste afgeleide met behulp van de quotiëntregel en substitueren dan de eerste afgeleide:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{(24x^2 - 9y'(x))(9x - 6y^2) - (8x^3 - 9y)(9 - 12yy'(x))}{(9x - 6y^2)^2} = \\ &= \frac{(24x^2 - 9\frac{8x^3 - 9y}{9x - 6y^2})(9x - 6y^2) - (8x^3 - 9y)(9 - 12y\frac{8x^3 - 9y}{9x - 6y^2})}{(9x - 6y^2)^2} = \\ &= \frac{(24 - 9 \cdot \frac{2}{3})(9 - 6 \cdot 2^2) - (8 - 9 \cdot 2)(9 - 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3})}{(9 - 6 \cdot 2^2)^2} = \\ &= \frac{18 \cdot (-15) - (-10) \cdot (-7)}{15^2} = -\frac{270 + 70}{225} = -\frac{340}{225} = -\frac{68}{45}. \end{aligned}$$

Opgave 5

Merk op: In deze opgave mag je het onderdeel (a) gebruiken ook als je deze niet gedaan hebt.

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door het functievoorschrift

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x}, & \text{voor } x \neq 0, \\ 0, & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Bewijs met behulp van de *insluitstelling* (Squeeze Theorem) dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{\pi}{x} \right) = 0.$$

- (b) Laat zien met behulp van de definitie dat f in 0 differentieerbaar is.
- (c) Is de functie f ook continu in 0? Zo ja, geef een bewijs. Als dit niet het geval is, geef een bewijs voor het tegendeel.

Uitwerking Opgave 5

- (a) Omdat $|\sin y| \leq 1$ voor elke y , bepalen we dat voor elke $x \neq 0$ geldt dat

$$-x \leq x \sin \frac{\pi}{x} \leq x.$$

Zowel linker als rechter kant van deze ongelijkheid convergeert tot 0 met $x \rightarrow 0$. Volgens de insluitstelling heeft de functie $x \sin \frac{\pi}{x}$ een limiet in het punt 0 dan, en deze limiet is gelijk aan 0.

- (b) Bij definitie is de functie f differentieerbaar in het punt a , als de volgende limiet bestaat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

In dit geval $a = 0$ en daarom kijken we naar de limiet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{\pi}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \sin \frac{\pi}{h} \right).$$

Maar de laatste limiet bestaat volgens het onderdeel (a). We concluderen dat de functie f in 0 differentieerbaar is en ook dat $f'(0) = 0$.

- (c) De functie die differentieerbaar in het punt a is ook continu in dit punt. Deze belangrijke stelling hebben we op het hoorcollege bewezen. Met behulp van deze stelling kunnen we onmiddellijk concluderen dat de functie f in 0 continu is.