



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Tentamen Analyse A

woensdag 5 januari 2011, 9–12 uur

- Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is *niet* toegestaan.
- In totaal zijn er 6 opgaven.
- Het maximaal aantal te behalen punten is 50 die als volgt verdeeld worden over de verschillende onderdelen:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5	6a	6b	6c
3	3	3	3	3	4	3	2	4	3	3	4	4	4	4

- Het maximaal aantal punten wordt toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord.
- Het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5} \cdot \text{score}$.
- Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum (binnen 15 werkdagen) bij de balie van het secretariaat (kamer E3.02).

ZIE OMMEZIJDE!!!

Opgave 1

- (a) Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en $a \in \mathbb{R}$. Geef de definitie van

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

- (b) Laat met behulp van deze definitie zien dat

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 2) = -5.$$

Uitwerking Opgave 1

- (a) De definitie van limiet luidt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- (b) In het klad: met $f(x) = 3x - 2$

$$\begin{aligned} |f(x) - (-5)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x - 2 + 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x + 3| < \varepsilon \\ |3(x - (-1))| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x - (-1)| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Neem dus $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Dan volgt - in omgekeerde volgorde:

$$|x - (-1)| < \delta \implies |3(x - (-1))| < \varepsilon \implies |3x - 2 + 5| < \varepsilon \implies |f(x) - (-5)| < \varepsilon.$$

Opgave 2

Zij $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ de functie gegeven door

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

- (a) Laat zien dat f inverteerbaar is.
(b) Bepaal het functievoorschrift voor de inverse f^{-1} .
(c) Laat zien dat er een $c > 0$ bestaat waarvoor $f(c) = c^5$.

Uitwerking Opgave 2

- (a) Het is genoeg te laten zien dat f strikt stijgend is. Dit is gemakkelijk te zien aan de afgeleide welke strikt positief is:

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right) = \frac{x + 1}{\sqrt{x(x + 2)}} > 0 \text{ voor alle } x \in [0, \infty).$$

Dan is f dus 1-1 en inverteerbaar.

- (b) Om het functievoorschrift voor de inverse te bepalen lossen we de volgende vergelijking op naar x :

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \implies y^2 = (x + 1)^2 - 1 \implies x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + y^2}$$

Merk nu op dat $x \geq 0$ en dat dus (?)

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}$$

Verder geldt dat $D_{f^{-1}} = B_{f^{-1}} = [0, \infty)$.

- (c) Pas hier de *doorlopendheidsstelling* toe op de verschilfunctie $V : x \mapsto f(x) - x^5$, welke continu is op zijn domein. Er geldt dat

$$V(1) = \sqrt{3} - 1 > 0 \text{ en } V(10) = \sqrt{120} - 10^5 < 0.$$

Dan is er $c \in (1, 10)$ waarvoor $V(c) = 0$, oftewel $f(c) = c^5$.

Opgave 3

Bereken de volgende limieten, indien ze bestaan:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 3x + 3}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$.

Uitwerking Opgave 3

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 3x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 + 3x + 3)}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x - 3}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3x-3}{x}}{\frac{x + \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{3}{x}}{1 + \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{3}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{-3}{1 + \sqrt{1}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(b) Gebruik hier herhaald de *stelling van l'Hospital*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x}{(x-1) \ln x} - \frac{x-1}{(x-1) \ln x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} (x \ln x - (x-1))}{\frac{d}{dx} ((x-1) \ln x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x} + \ln x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1/x^2 + 1/x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Opgave 4

Laat $f : [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1}.$$

- (a) Laat zien dat f een globaal maximum en een globaal minimum aanneemt.
- (b) Bereken alle kritieke punten van f , en onderzoek met behulp van een tekenschema of f in de gevonden punten een lokaal extremum aanneemt.
- (c) Laat zien dat $x = 1$ een kandidaat is voor een buigpunt.
- (d) Bepaal de globale extrema van f en schets de grafiek.

Uitwerking Opgave 4

- (a) De functie f is continu op het gesloten en begrensde interval $[-3, 1]$ en neemt daarop dus een globaal maximum en minimum aan.
- (b) Er geldt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1} \right) = \frac{2x(x^2 - 2)}{\sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1}}.$$

Dan

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x(x^2 - 2)}{\sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee (x^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

We vinden dus als kritieke punten $\{-\sqrt{2}, 0\}$. Merk op dat $\sqrt{2} > 1$ en dus $\sqrt{2} \notin D_f$ en valt deze oplossing af. Tekenschema: Conclusie: in $x = -\sqrt{2}$ hebben we een lokaal minimum, in $x = 0$ een lokaal maximum.

(c) De tweede afgeleide wordt gegeven door

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{2x(x^2 - 2)}{\sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1}} = \frac{2x^6 - 12x^4 + 30x^2 - 20}{((x^2 - 2)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Merk op dat $f''(1) = 0$, de minimale vereiste voor een buigpunt. Verder geldt ook dat de teller als volgt te factoriseren is

$$2(x + 1)(x - 1)(-5x^2 + x^4 + 10).$$

Hieraan zien we dat de teller in $x = 1$ van teken wisselt, en dus ook f'' . Dus hebben we in $x = 1$ een buigpunt.

(d) Om de globale extrema te vinden dienen we de in onderdeel (b) gevonden lokale extrema te vergelijken met de randpunten.

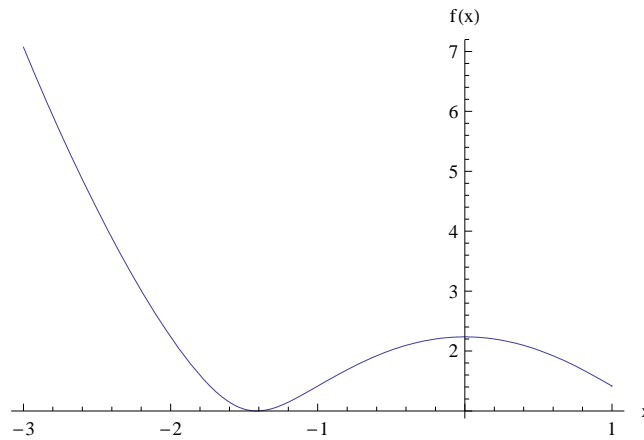
x	$f(x)$
-3	$\sqrt{50}$
1	$\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$	1
0	$\sqrt{5}$
$\sqrt{2}$	1

Hieruit volgt dat het globale maximum zich bij $x = -3$ bevindt met waarde $f(-3) = \sqrt{50}$, en globale minimum bij $x = -\sqrt{2}$ met waarde $f(-\sqrt{2}) = 1$.

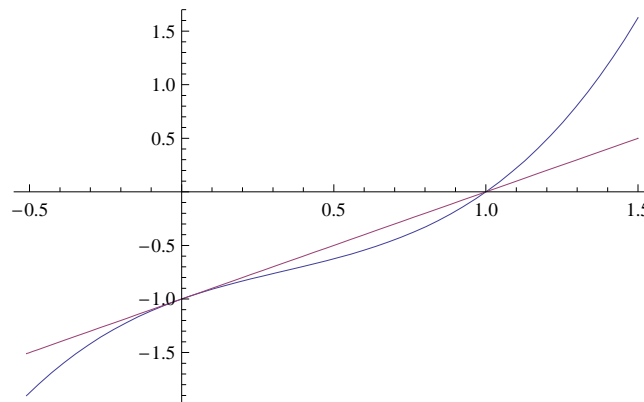
Opgave 5

Bepaal het oppervlak van het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van de functie gegeven door $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ en de lijn $\ell : y = x - 1$. Maak hiertoe eerst een illustratieve schets.

Uitwerking Opgave 5



Figuur 1: Grafiek van de functie f



Figuur 2: Op het interval $[0, 1]$ ligt de grafiek van g onder de lijn ℓ .

Merk op dat $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$ en dat dus de snijpunten van de bijbehorende grafiek met de lijn $\ell : y = x - 1$ gegeven worden door $(0, -1)$ en $(1, 0)$.

Verder

$$g(x) - (x - 1) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

dus $g(x) \geq x - 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Dus wordt het gevraagde oppervlak gegeven door

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{(x - 1) - g(x)\} dx &= \int_0^1 \{x^2 - x^3\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Zie ook de figuur hieronder

Opgave 6

(a) Bereken

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \ln(x) dx.$$

(b) Bereken

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+3)} dx$$

met behulp van breuksplitsen.

(c) Bereken

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{1+e^{-x}} dx.$$

Uitwerking Opgave 6

(a) Gebruik partiële integratie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right]_t^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{1}{3} x^2 \cdot x \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right]_t^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{24} \ln \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{72} - \lim_{t \downarrow 0} \left\{ \frac{1}{3} t^2 \cdot t \ln t - \frac{1}{9} t^3 \right\} \\ &= -\frac{1}{24} \ln 2 - \frac{1}{72}. \end{aligned}$$

(b) Splits eerst in twee breuken met noemers x en $x+3$:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)}{x(x+3)} + \frac{Bx}{x(x+3)} \\ &= \frac{A(x+3) + Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A}{x(x+3)}. \end{aligned}$$

Dan moet gelden dat

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ 3A &= 1 \\ \implies A &= \frac{1}{3}, B = 1 - A = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+3)} dx &= \int_1^2 \left\{ \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \frac{1/3}{x} + \frac{2/3}{x+3} \right\} dx \\ &= [1/3 \ln x + 2/3 \ln(x+3)]_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{2}{3} \ln 4 \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \ln 5 - \frac{2}{3} \ln 4 = \frac{1}{3} \ln \frac{50}{16}.\end{aligned}$$

(c) Gebruik hier de substitutieregels $u = e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} \sqrt{1+e^{-x}} dx &= \int_0^\infty -\sqrt{1+e^{-x}} d(e^{-x}) \\ &= \int_1^0 -\sqrt{1+u} du = \int_0^1 \sqrt{1+u} du \\ &= \left[\frac{2}{3} (1+u)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

EINDE TENTAMEN ANALYSE A
