FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, tentamen — woensdag 6 januari 2010, 9–12 uur

Opgave 1

Zij $\alpha \in \mathbb{R}$ een constante en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{x} & \text{als } x \neq 0, \\ \alpha & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

(**a**) Bepaal de waarde van α waarvoor f continu op $\mathbb{R}$ is.

(**b**) Is f voor deze waarde van α differentieerbaar? Zo ja, bepaal $f'(0)$. Zo nee, leg uit waarom niet.

Uitwerking Opgave 1

(a) Er moet gelden dat $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ voor alle $a \in dom(f) = \mathbb{R}$. Nu is f op $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ een continue functie als product van twee continue functies $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $x \mapsto \sin(\pi x)$. We hoeven alleen dus te kijken naar het limietgedrag in $a = 0$. Hier hebben we een vorm waarbij we de *stelling van l'Hospital* kunnen toepassen, nl "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \pi.$$

Daarom is het voldoende indien $\alpha = \pi$.

(b) Differentieerbaarheid controleren we via de definitie, direct rekenregels toepassen heeft geen zin vanwege het gescheiden functievoorschrift. Maar tweemaal de *stelling van de l'Hospital* toepassen levert:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(\pi x)}{x} - \pi}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(\pi x)}{x} - \frac{\pi x}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x) - \pi x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cos(\pi x) - \pi}{2x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\pi(\cos(\pi x) - 1)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\pi^2\sin(\pi x)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Dus ja, de functie is differentieerbaar en $f'(0) = 0$.

Opgave 2

Zij k de functie gegeven door het voorschrift

$$k(x) = \ln(x-2) + \ln(x+3).$$

(**a**) Bepaal het domein van k en laat zien dat k hierop strikt stijgend is.

(**b**) Concludeer op de basis van (a) dat k inverteerbaar is. Wat is het bereik van k^{-1}?

(**c**) Bepaal k^{-1}.

(**d**) Wat is het domein van k^{-1}?

Uitwerking Opgave 2

(a) Er geldt $x \in dom\,(k) \iff x-2>0$ en $x+3>0 \iff x>2$. Dus $dom\,(k) = (2,\infty)$. De functie k is differentieerbaar en $k'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} > 0$ voor alle $x \in dom\,(k)$. Dit betekent dat k strikt stijgend is.

(b) Een strikt stijgende functie is injectief en daarmee inverteerbaar; dus de inverse k^{-1} bestaat. Verder geldt dat het bereik van k^{-1} gelijk is aan het domein van k, dus $(2,\infty)$.

(c) We lossen voor iedere $y \in dom\,(k)$ op naar x :

$$\begin{aligned} y &= k^{-1}(x) \iff k(y) = x \iff \ln(y-2) + \ln(y+3) = x \wedge y \in dom\,(k) \\ &\iff \ln((y-2)(y+3)) = x \wedge y > 2 \iff (y-2)(y+3) = e^{\ln((y-2)(y+3))} = e^x \wedge y > 2 \\ &\iff y^2 + y - 6 - e^x = 0 \wedge y > 2 \iff y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25+4e^x}}{2} \wedge y > 2 \\ &\iff k^{-1}(x) = y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{25+4e^x}. \end{aligned}$$

Merk op dat inderdaad $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{25+4e^x} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{25+0} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2.$

(d) Er geldt $dom\,(k^{-1}) = ran\,(k) = \mathbb{R}$ namelijk

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \infty \text{ en } \lim_{x\downarrow 2} k(x) = -\infty$$

en omdat f continu is wordt iedere waarde in $\mathbb{R}$ aangenomen.

Opgave 3

Zij $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door het voorschrift

$$g\left(x\right) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2}. \tag{1}$$

De tweede afgeleide van g in (1) wordt gegeven door

$$g''(x) = \frac{2\left(4 - 6x + x^3\right)}{(x^2 - 2x + 2)^3}.$$

(a) Bepaal de kritieke punten van g op $\mathbb{R}$.

(b) Bepaal het tekenschema voor de afgeleide en aan de hand daarvan de aard van de kritieke punten (zadelpunt, maximum/minimum).

(c) Laat zien dat $x = 2$ kandidaat is voor een buigpunt. Vind de andere twee kandidaat buigpunten.

(d) Bepaal het tekenschema voor de tweede afgeleide en de maximale intervallen waarop g concaaf danwel convex is.

(e) Bepaal zo mogelijk $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$. Schets de grafiek van g op het interval $[-6, 6]$.

Uitwerking Opgave 3

(a) Kritieke punten zijn díe waarden c waarvoor $g'\left(c\right) = 0$ of waar $g'\left(c\right)$ niet bestaat. In dit geval hebben we te maken met een differentieerbare functie, aangezien de noemer nooit 0 wordt (de discriminant van de tweede graads term is gelijk aan $D = 4 - 8 = -4 < 0$). We vinden alle kritieke punten dus als oplossing van

$$\begin{aligned} g'\left(x\right) &= 0 \iff \frac{x^2 - 2x + 2 - x\left(2x - 2\right)}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2} = 0 \iff \frac{2 - x^2}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2} = 0 \\ &\iff x^2 = 2 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Of de gevonden waarden daadwerkelijk buigpunten zijn, volgt uit het tekenschema in het volgende onderdeel.

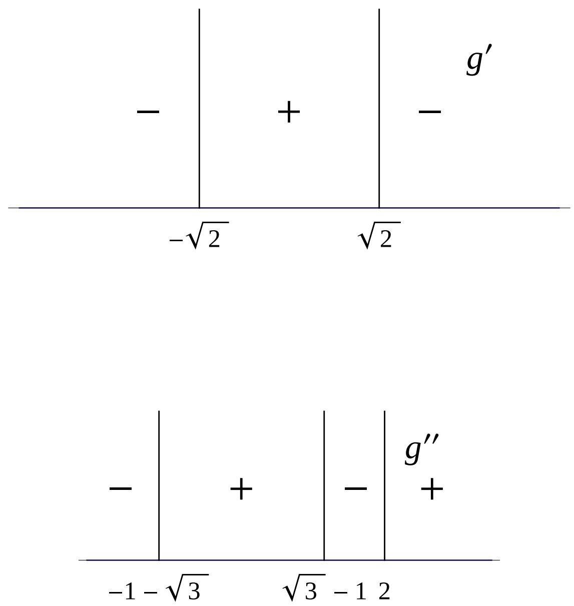
(b) Zie Figuur 1 voor het tekenschema van g'. Hieruit volgt dat g dalend is op $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right]$, stijgend is op $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, en dalend op $\left[\sqrt{2}, \infty\right)$.

(c) $g''\left(2\right) = 0$, dus kandidaat voor buigpunt. Nu vinden we de andere eventuele nulpunten van g'' door de factor $\left(x - 2\right)$ uit te delen:

$$x^3 - 6x + 4 = \left(x - 2\right)\left(x^2 + 2x - 2\right)$$

en dus vinden we de andere nulpunten uit

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \iff x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$



Figuur 1: *Tekenschema's van g', g''.*

(d) Zie Figuur 1 voor het tekenschema van g''. We concluderen dat g concaaf is op $(-\infty, -1-\sqrt{3}]$ en $[-1+\sqrt{3}, 2]$, namelijk op het inwendige van deze intervallen geldt $g'' < 0$; zo is g convex op $[-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$ en $[2, \infty)$, omdat op het inwendige $g'' < 0$.

(e) Zie in figuur 2 de grafiek van g. Merk het gedrag van de functie voor $x \to \pm\infty$ op. Er geldt namelijk:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x/x^2}{(x^2-2x+2)/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x}{(1-2/x+2/x^2)} = \frac{0}{1-0+0} = 0.$$

Merk op dat we hier voor het berekenen van beide limieten kunnen volstaan met deze ene regel, aangezien het limiet gedrag voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ hetzelfde is.

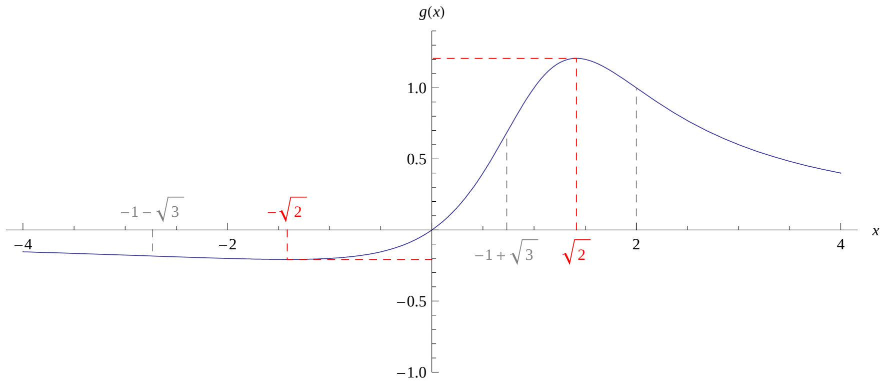
Opgave 4

(**a**) Formuleer de *Hoofdstelling van de Analyse*.

(**b**) Gegeven is de functie $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$H(x) = \int_{\sin(x)}^{2x} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Bepaal $H'(x)$ voor alle x.



Figuur 2: *Grafiek van g.*

Uitwerking Opgave 4

(a) *Hoofdstelling van de Analyse:* Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu.
(I): $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

is continu en voor $x \in (a, b)$ geldt $F'(x) = f(x)$,
(II) Als G een primitieve is van f dan geldt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

(b) Zij $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Dan is F primitieve van $x \mapsto e^{-x^2}$ en geldt

$$H(x) = F(2x) - F(\sin x).$$

Dan geldt dus met de kettingregel voor differentiatie dat

$$H'(x) = F'(2x) \cdot 2 - F'(\sin x) \cdot \cos x = 2e^{-(2x)^2} - e^{-\sin^2 x} \cos x.$$

Opgave 5

(**a**) Bepaal $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

(**b**) Bepaal $\displaystyle\int_0^{1600} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Opmerking: $\ln(1 + \sqrt{x})$ is niet een gezochte primitieve!

Uitwerking Opgave 5

(a) Met gebruik van partiële integratie vinden we:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan(x)\, dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x))\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{1600} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \left\{u = \sqrt{x}, du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx\right\} = \int_0^{1600} \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \\
&= \int_0^{40} \frac{2u}{1+u} du = \int_0^{40} 2\left\{\frac{1+u}{1+u} - \frac{1}{1+u}\right\} du = \\
&= \left[2(u - \ln(1+u))\right]_0^{40} = 80 - 2\ln 41.
\end{aligned}$$

Opgave 6

(**a**) Bepaal (eventueel met breuksplitsen) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\, \mathrm{d}x.$

(**b**) Beschouw de integraal

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\, \mathrm{d}x.$$

Bepaal of deze integraal convergeert of divergeert. Indien convergent, wat is zijn waarde?

Uitwerking Opgave 6

(a) Breuksplitsen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 - 4x + 3} &= \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \\
&= \frac{A(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \\
&= \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(A+B)x - 3A - B}{(x-1)(x-3)}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A + B = 0$ en $-3A - B = 1$, oftewel $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$. Dus dan

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-3} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln |x-3| \right] + C. \end{aligned}$$

(b) Er geldt

$$\begin{aligned} \int_4^\infty \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= \lim_{t \to \infty} \int_4^t \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \right]_4^t = \\ &= \lim_{t \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-3}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{4-3}{4-1} \right| \right\} = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$