FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Analyse A, Voortgangstoets 2 Uitwerking	vrijdag 27 november 2009, 11–12 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. Voor ieder onderdeel kan je maximaal 3 punten behalen, en dus maximaal 24 punten in totaal. Je cijfer wordt dan bepaald als $\frac{2}{5}(\text{score}+1)$.

Opgave 1

Zij $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de functie gegeven door het voorschrift

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}.$$

(a) Bepaal f' en eventuele kritieke punten van f.

(b) Stel het tekenschema voor f' op en bepaal hiermee de extreme waarden van de functie.

(c) Bepaal f'' en bijbehorend tekenschema. Bepaal de maximale intervallen waarop f concaaf, danwel convex is.

(d) Vind de absoluut maximale en minimale waarde van f op het interval $[-2,2]$.

(e) Schets de grafiek van f.

Uitwerking Opgave 1

(a) De afgeleide wordt gegeven door

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x^2+1\right)\cdot 1-(x-1)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}= \\ &= \frac{1+2x-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Kritieke punten zijn die waarden van $c\in\mathbb{R}$ waarvoor $f'(c)=0$ of waar $f'(c)$ niet bestaat. Dit laatste is nooit het geval dus lossen we op

$$\begin{aligned} f'(c) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1+2c-c^2}{\left(1+c^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow 1+2c-c^2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad c_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2--4}}{-2}=1\pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Verzameling kritieke punten is dus $\left\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right\}$.

(b) Tekenoverzicht van f'

$$\begin{array}{ccccc|c} - & | & + & | & - & f' \\ \hline \searrow & 1-\sqrt{2} & \nearrow & 1+\sqrt{2} & \searrow & f \end{array}$$

Dus f neem een (lokaal) minimale waarde aan in $1-\sqrt{2}$, en een (lokaal) maximale waarde in $1+\sqrt{2}$. Verder geldt $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.Dus $f\left(1-\sqrt{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{1+\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$ is de absoluut minimale waarde van f op $\mathbb{R}$; $f\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$ is de absoluut minimale waarde van f op $\mathbb{R}$.

(c) De tweede afgeleide f'' wordt gegeven door

$$f''(x) = \frac{2(1+x)\left(1-4x+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \Leftrightarrow 2(1+x)\left(1-4x+x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \\ x &= -1 \text{ of } x = 2-\sqrt{3} \text{ of } x = 2+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Tekenschema van f''

$-$	$\mid$	$+$	$\mid$	$-$	$\mid$	$+$	f''
$\searrow$	-1	$\nearrow$	$2-\sqrt{3}$	$\searrow$	$2+\sqrt{3}$	$\nearrow$	f'
concaaf		convex		concaaf		convex	f

Dus de maximale intervallen waarop f concaaf is worden gegeven door $(-\infty,-1]$ en $\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$. De maximale intervallen waarop f convex is zijn $\left[-1, 2-\sqrt{3}\right]$ en $[2+\sqrt{3}, \infty)$.[1]

(d) Op het interval $[-2,2]$ neemt f nog steeds in $1-\sqrt{2}$ de absoluut minimale waarde aan, echter het eerder berekende absoluut maximum vervalt, $1+\sqrt{2} \notin [-2,2]$. Blijft over een randmaximum in 2.

Opgave 2

Bepaal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x + x)}{\ln x}.$$

Uitwerking Opgave 2

Hier hebben we te maken met een geval "$\frac{\infty}{\infty}$"voor de Stelling van de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x + x)}{\ln(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\frac{1}{\ln x + x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\frac{1}{\ln x + x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{\ln x + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1. \end{aligned}$$

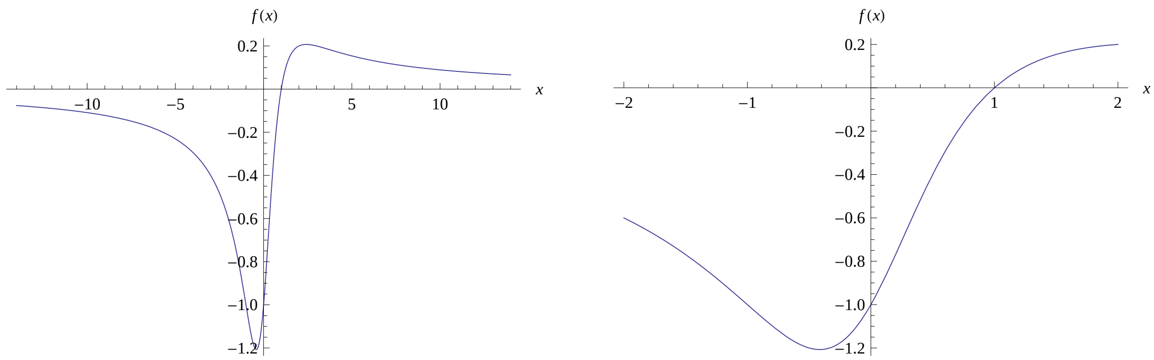
(a) Schets van de grafiek vinden we in Figuur 1.

Opgave 3

De functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $h(x) = \displaystyle\int_1^x |2t-3|\, dt$ voor $x \in \mathbb{R}$.

[1] Overigens, voor diegenen die zijn blijven steken bij het oplossen van de volgende derdegraads vergelijking: $x^3-3x^2-3x+1=0$. Hierboven hebben we al een ontbinding in factoren bereikt, maar als je dat nog niet hebt kan het volgende handig zijn: een product $(x+a)(x^2+bx+c)$ werkt uit tot $x^3+(a+b)x^2+(ab+c)x+ac$. Als a en c beide gehele getallen zijn, dan is ac dus ook een geheel getal. Andersom, als in de derdegraadsvergelijking de constante geheel is, kan je kijken of een bovenstaande ontbinding is te maken waarbij a een deler is van die constante. In dit geval, kijk naar delers van 1; dit zijn 1 en -1. Toevallig is -1 een oplossing van de vergelijking en kunnen we een ontbinding vinden: $x^3-3x^2-3x+1=(x-(-1))(1-4x^2+x^2)$. En dan uw weg vervolgen.

Out[25]=



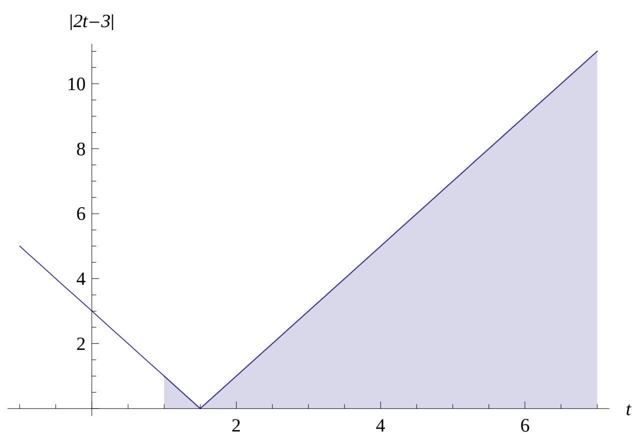
Figuur 1: *De grafiek van $f(x)$ op $[-2, 2]$ en op een ruimer interval.*

(a) Bepaal $h(-10)$ en $h(7)$.

(b) Is h differentieerbaar? Zo ja, geef het functievoorschrift voor de afgeleide. Zo nee, licht toe waarom niet.

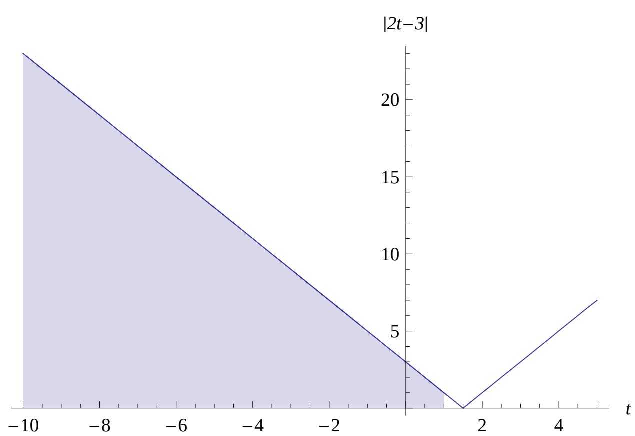
Uitwerking Opgave 3

(a) $h(7)$ is de oppervlakte die hieronder in Figuur 2 blauwgrijs is gearceerd, dus $\frac{61}{2}$. En zo ook bepalen we $h(-10)$, de waarde die met de oppervlakte aangegeven in Figuur 3 bepaald kan worden. Let wel op dat hier de oppervlakte ingesloten door de lijnen $x = -10, x = 1$ de x-as en de grafiek van de functie negatief genomen moet worden. Dus $h(-10) = -132$.



Figuur 2: *Ter berekening van $h(7)$.*

(b) Deze functie is differentieerbaar op grond van de *Hoofdstelling van de Analyse*, en $h'(x) = |2x - 3|$.



Figuur 3: *Ter berekening van* $h(-10)$.