KReS1

Tentamen 3 April 2009

Locatie: Tentamenzaal B
Duur: 9–12u
Docenten: Katrien Antonio en Luuk Seelen

Instructies:

- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- motiveer je antwoorden; antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend;
- op een elektronisch rekentoestel na mogen geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- veel succes!

1. Een vaas bevat vier gele en vijf rode knikkers. Hieruit worden achtereenvolgens zonder teruglegging knikkers getrokken. Laat X het aantal trekkingen voorstellen tot en met de eerste gele.
   (a) Welke waarden kan X aannemen?
   (b) Bepaal de kansverdeling van X.
   (c) Bereken de verwachting en de variantie van X.

Opl. (a) Als X het aantal trekkingen weergeeft tot en met de eerste gele, dan kan X waarden aannemen van 1 tot en met 6.
(b) X is discreet. Het volstaat dus om de uitdrukking vast te leggen voor $P(X = k)$ met $k = 1, \ldots, 6$. Er geldt

$$P(X = k) \quad = \quad \begin{cases} \frac{4}{9} \text{ als } k = 1 \\ \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \ldots \times \frac{7-k}{11-k} \times \frac{4}{9-(k-1)} \text{ als } 2 \leq k \leq 6. \end{cases}$$

De kansverdeling van X wordt dan volledig gegeven in onderstaande tabel.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0.444	0.278	0.158	0.079	0.032	0.008

(c) De verwachtingswaarde van X kan dan berekend worden uit:

$$EX \quad = \quad \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = 2.$$

Voor de variantie van X bepalen we eerst:

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = 5.333$$

De variantie wordt dan $\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = 1.333$.

2. Bij darts gooien we met een pijltje naar een rond bord met straal a. De afstand tussen het pijltje en het middelpunt geven we weer met de stochast R. We veronderstellen dat het bord met straal a altijd geraakt wordt. De dichtheidsfunctie van R is gegeven door

$$f_R(r) = C\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right).$$

   (a) Bepaal de constante C.

   (b) Bepaal een uitdrukking voor de cdf van R.

Opl. (a) De constante C bepalen we uit

$$\begin{aligned}
\int_0^a f_R(r)dr &= C\int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr \\
&= C\left[r - \frac{r^3}{3a^2}\right]_0^a \\
&= C\frac{2a}{3}.
\end{aligned}$$

Gelijkstellen aan 1 geeft dan $C = \frac{3}{2a}$.
(b) De cdf van R vinden we als volgt:

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= P(R \leq r) = \int_0^r C\left(1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2\right) dt \\
&= C\left[t - \frac{t^3}{3a^2}\right]_0^r \\
&= C\left[r - \frac{r^3}{3a^2}\right] \\
&= \frac{3}{2a}\left[r - \frac{r^3}{3a^2}\right] \\
&= \frac{3r}{2a} - \frac{r^3}{2a^3}.
\end{aligned}$$

Dan is $F_R(r) = \frac{3r}{2a} - \frac{r^3}{2a^3}$ voor $0 \leq r \leq a$.

3. Neem X een discrete stochast.

   (a) Toon aan: $EX^2 = \mathrm{Var}(X) + (EX)^2$. Vertrek hierbij vanuit de definitie van $\mathrm{Var}(X)$.

   (b) Zij $G_X(t)$ de kansgenererende functie van X in t. Leg uit hoe je, respectievelijk, $P(X = 3)$ en EX kunt berekenen vanuit $G_X(t)$. Motiveer duidelijk je strategie.

Opl. (a) Zij X discreet. Er geldt dan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E[(X-EX)^2] \\
&= \sum_k (k-EX)^2 P(X=k) \\
&= \sum_k (k^2 - 2kEX + (EX)^2) P(X=k) \\
&= \sum_k k^2 P(X=k) - 2EX \sum_k kP(X=k) + (EX)^2 \sum_k P(X=k) \\
&= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\
&= EX^2 - (EX)^2.
\end{aligned}$$

Dus volgt: $EX^2 = \mathrm{Var}(X) + (EX)^2$.

(b) Bekijk de uitdrukking voor $G_X(t)$:

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= E[t^X] = \sum_k t^k P(X=k) \\
&= P(X=0) + tP(X=1) + t^2 P(X=2) + \ldots.
\end{aligned}$$

Nemen we vervolgens de eerste afgeleide van $G_X(t)$ naar t dan vinden we:

$$\begin{aligned}
G_X^{(1)}(t) &= P(X=1) + 2tP(X=2) + 3t^2 P(X=3) + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} kt^{k-1} P(X=k).
\end{aligned}$$

$t=1$ invullen geeft dan EX.

Om $P(X=3)$ te berekenen, nemen we $G_X^{(3)}(t)$:

$$G_X^{(3)}(t) = 3 \times 2 \times 1 \times P(X=3) + 4 \times 3 \times 2 \times t \times P(X=4) + O(t^2).$$

$t=0$ invullen geeft $P(X=3) = G_X^{(3)}(0)/3!$.

4. Doorgaans komt één derde van de mensen die in januari de apotheek binnenstappen, een welbepaalde hoestsiroop kopen. Op een zekere dag in januari krijgt de apotheker 120 klanten over de vloer.

(a) Wat is die dag de verwachte vraag naar hoestsiroop?

(b) Als de apotheker die dag 45 flessen hoestsiroop in voorraad heeft, wat is dan de kans dat de vraag naar hoestsiroop het aanbod overstijgt?

(c) Hoeveel flessen hoestsiroop moet hij minstens in voorraad hebben opdat de kans dat de vraag het aanbod die dag overstijgt hoogstens 0.2 is?

Opl. Zij X_i een BERN(1/3) veranderlijke die de waarde 1 aanneemt als klant i hoestsiroop wil en 0 anders ($i = 1, \ldots, 120$).

(a) $E[\sum_{i=1}^{120} X_i] = 120 \times \frac{1}{3} = 40$.

(b) We bepalen volgende kans aan de hand van de centrale limietstelling (CLS):

$$\begin{aligned}
P(\sum_{i=1}^{120} X_i > 45) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120\times 1/3}{\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}} > \frac{45+0.5-120\times 1/3}{\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}}\right) \\
&\approx P(Z > 1.065) \\
&= P(Z < -1.065) = 0.1434,
\end{aligned}$$

met $Z \sim N(0,1)$. [Zonder continuïteitscorrectie: bepaal $P(Z > 0.968) = 0.1665$.]

(c) Noem het aantal flessen in voorraad n. Dan moet op basis van CLS

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{120} X_i > n\right) &\leq 0.2 \\
&\Updownarrow \\
P\left(\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120\times 1/3}{\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}} > \frac{n+0.5-40}{\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}}\right) &\leq 0.2 \\
&\Downarrow \\
P\left(Z > \frac{n+0.5-40}{\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}}\right) &\leq 0.2,
\end{aligned}$$

met $Z \sim N(0,1)$.

Uit de inverse kanstabel van de $N(0,1)$ verdeling halen we: $P(Z > 0.8416) = 0.2$. Bijgevolg moet

$$\begin{aligned}
\frac{n+0.5-40}{\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}} &\geq 0.8416 \\
&\Downarrow \\
n &\geq 0.8416\times\sqrt{120\times 1/3\times 2/3}+40-0.5 \\
&\Downarrow \\
n &\geq 43.846 \text{ (zonder cont. corr. 44.346).}
\end{aligned}$$

Bijgevolg moeten er minstens 44 (45) flessen in voorraad zijn.

5. Stel dat rivieroverstromingen met grotere schade (meer dan 10^6 euro) gemiddeld 1 maal per jaar voorkomen volgens een homogeen Poisson proces.

   (a) Wat is de kans dat zich over een periode van 7 jaar 3 of minder overstromingen met schade groter dan 10^6 euro voordoen?

   (b) Wat is de kans dat over een periode van 10 jaar er zich tijdens 6 van de 10 kalenderjaren minstens 1 zo'n overstroming voordoet?

   Stel dat de schade X (uitgedrukt in 10^6 euro) exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde 2 ($\times 10^6$ euro).

   (c) Gegeven dat de overstromingsschade X groter is dan 1 miljoen euro, wat is de kans dat de schade groter is dan 3 miljoen euro?

Opl. Noem Y_t het aantal overstromingen met grotere schade in de periode van $[0, t]$ jaar. Dan is $Y_t \sim \text{POI}(\lambda t)$.

(a) Y_7 is het aantal overstromingen met grotere schade op een periode van 7 jaar. Dan is

$$\begin{aligned} P(Y_7 \leq 3) &= P(Y_7 = 0) + P(Y_7 = 1) + P(Y_7 = 2) + P(Y_7 = 3) \\ &= e^{-7} + e^{-7}7 + e^{-7}\frac{7^2}{2} + e^{-7}\frac{7^3}{3!} \\ &= 0.082. \end{aligned}$$

(b) Zij Y_1 het aantal overstromingen met grotere schade op een periode van 1 jaar. We berekenen eerst

$$P(Y_1 \geq 1) = 1 - P(Y_1 = 0) = 1 - e^{-1} = 0.632.$$

De gevraagde kans wordt dan

$$\binom{10}{6}(1 - e^{-1})^6 (e^{-1})^4 = 0.245.$$

(c) Zij $X \sim \text{EXP}(2)$ (dan is $EX = 2$), dan geldt (voor $x > 0$)

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

We dienen nu te bepalen:

$$\begin{aligned} P(X > 3 | X > 1) &= \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}3\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}1\right)} \\ &= 0.368. \end{aligned}$$

6. Door variaties in de productie weet men dat 10% van de producten op het einde van een productielijn niet voldoen aan de vooropgestelde productspecificaties. Om goede producten van slechte producten te scheiden voert men een automatische kwaliteitscontrole uit die met 99% kans een goed product als goed kwalificeert. Met welke kans moet de kwaliteitscontrole een slecht product als slecht kwalificeren zodat de goed gekwalificeerde producten die op de markt worden gebracht slechts 1% foute producten bevatten?

[Hint: bouw je redenering op door te vertrekken vanuit de kwaliteitseis "de goed gekwalificeerde producten die op de markt worden gebracht bevatten slechts 1% foute producten". Druk dit uit als een voorwaardelijke kans en ga hiermee aan de slag.]

Opl. Noteer G voor een goed product, S voor een slecht, GK voor goed gekeurd en SK voor afgekeurd. Gegeven is: $P(G) = 0.9$, $P(S) = 0.1$, $P(GK|G) = 0.99$. We zoeken $P(SK|S)$ zodat

$$P(S|GK) = 0.01.$$

Volgens Bayes weten we: (noem $x = P(SK|S)$)

$$\begin{aligned} P(S|GK) &= \frac{P(S \cap GK)}{P(GK)} = \frac{P(GK|S)P(S)}{P(GK|G)P(G) + P(GK|S)P(S)} \\ &= 0.01. \end{aligned}$$

Dan moet gelden:

$$\begin{aligned} 0.01 &= \frac{(1-x)0.1}{0.99 \times 0.9 + (1-x)0.1} \\ &\Updownarrow \\ 0.01 \times (0.99 \times 0.9 + 0.1 - 0.1x) &= 0.1 - 0.1x. \end{aligned}$$

We vinden uiteindelijk $x = 0.91$.

7. X is uniform verdeeld over het interval $[0,1]$. Zij $Y = -2\ln(X)$.

   (a) Leid de verdelings– en dichtheidsfunctie van Y af. (Denk aan de drager.)

   (b) Geef de verwachtingswaarde en standaarddeviatie van Y.

Opl. Y heeft als drager $[0, +\infty)$. Voor de cdf geldt:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(-2\ln(X) \leq y) \\ &= P(\ln(X) \geq -y/2) \\ &= P(X \geq \exp(-y/2)) \\ &= 1 - \exp(-y/2). \end{aligned}$$

Voor de pdf hebben we $f_Y(y) = \frac{1}{2}\exp(-y/2)$ en $y \geq 0$. We herkennen de verdeling van Y als een EXP(2) verdeling. Bijgevolg is $EY = 2$ en $\sigma_Y = \sqrt{2^2} = 2$.