Tentamen Kansrekening en Statistiek 1 **4 april 2008, 09.00–12.00 uur**

Dit tentamen bestaat uit zeven vragen, alle op één bladzijde.

Motiveer uw antwoorden. Antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. De waardering in punten staat tussen vierkante haakjes [·] achter het nummer van de opgave. Het maximale aantal te behalen punten is 70. Formuleer correct en volledig; wat onduidelijk, onvolledig of dubbelzinnig is, wordt fout gerekend.

1. [5] Stel, A en B zijn gebeurtenissen met $P(A) > 0$. Toon aan dat $P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$.

2. Beschouw een urn met 3 blauwe en 3 rode knikkers. De knikkers worden aselect uit de urn getrokken tot de knikkers op zijn.

   a. [5] Bereken de kans dat zich onder de laatste twee knikkers die worden getrokken precies één blauwe en één rode bevinden.

   b. [5] Bepaal de kansverdeling van X, waarbij X de trekking is waarin de tweede rode knikker wordt getrokken.

3. Een autoverzekeraar verzekert 60.000 mannen en 40.000 vrouwen. De kans dat een willekeurige mannelijke bestuurder in een bepaald jaar schade claimt van de verzekeraar is gelijk aan 8%, onafhankelijk van andere jaren. De analoge kans voor vrouwen is 4%. Neem aan dat de verzekeraar aselect een bestuurder uit het bestand licht. Laat A_1 en A_2 staan voor de gebeurtenis dat deze klant schade claimt in het komende jaar, respectievelijk het jaar daarop.

   a. [5] Bereken de kans dat de geselecteerde bestuurder gedurende het komende jaar schade claimt, dus $P(A_1)$.

   b. [5] Wat is de kans dat deze bestuurder in elk van de twee komende jaren schade claimt, $P(A_1 \cap A_2)$?

4. Zij X een stochast met de volgende kansgenererende functie:

$$G_X(t) = C\left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{6}\right)$$

   a. [5] Bepaal de waarde van C.

   b. [5] Bereken $P(X = 0)$.

   c. [5] Geef de verwachting van X.

5. De onafhankelijke grootheden X_1 en X_2 hebben beide een Poisson-verdeling met verwachting 50.

   a. [4] Bepaal met de normale benadering de kans $P(45 \leq X_1 \leq 55)$.

   b. [3] Bepaal met de normale benadering de kans $P(45 \leq X_1 \cap X_2 \leq 55)$.

   c. [3] Wat is de verdeling van $X_1 + X_2$?

6. Gegeven is dat X de volgende kansdichtheid heeft: $f_X(x) = cx(2-x)^2$, voor $0 \leq x \leq 2$. Buiten het interval $[0, 2]$ is de kansdichtheid nul.

   a. [5] Bepaal de constante c. Indien u hier niet uitkomt, reken dan verder met $c = 1$.

   b. [5] Gegeven is dat $E(X) = \frac{4}{5}$. Bereken de standaarddeviatie, σ_X, van X.

   c. [5] Leid de kansdichtheid af voor de stochast Y, waarbij $Y = 2 - X$.
   [Hint: druk $F_Y(y)$ uit in $F_X(x)$. Deze laatste hoeft niet expliciet te worden berekend.]

7. [5] Beschouw de Weibull-verdeling met parameters $\alpha = 3$ met algemene $\beta > 0$, dus de verdeling met kansdichtheid

$$f(x) = \frac{3x^2}{\beta^3} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^3}, \qquad x > 0.$$

   Bepaal de mediaan van deze kansdichtheid.

Tabellen en overzicht verdelingen op de achterzijde!

Uitwerkingen

1.
$$P(A\cap B|A\cup B)=\frac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}\le\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(A|B).$$

2. a.
$$\binom{2}{1}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5},$$

of

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

of

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

b. De tweede rode knikker kan worden getrokken in de 2e t/m de 5e trekking, dus we beperken ons tot $P(X=k)$ met $k\in 2,\ldots,5$. De tweede rode knikker kan alleen bij de $k$de trekking worden getrokken als zich onder de trekkingen ervoor en erna precies één rode bevindt.

$$P(X=k)=\frac{\binom{k-1}{1}\binom{6-k}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{(k-1)(6-k)}{20}.$$

We hebben dus $P(X=2)=\frac{1}{5}$, $P(X=3)=\frac{3}{10}$, $P(X=4)=\frac{3}{10}$ en $P(X=5)=\frac{1}{5}$. De kansen op overige uitkomsten zijn nul.

3. a. $P(A_1)=P(\text{man})\,(\text{schade}|\text{man})+P(\text{vrouw})\,(\text{schade}|\text{vrouw})=0.6\times0.08+0.4\times0.04=0.064.$

b. $P(A_1\cap A_2)=P(\text{man})\,(\text{schade}|\text{man})^2+P(\text{vrouw})\,(\text{schade}|\text{vrouw})^2=0.6\times0.08^2+0.4\times0.04^2=0.00448.$

4. a. $G_X(1)=2C=1$ dus $C=\frac{1}{2}$.

b. $P(X=0)=G_X(0)=\frac{1}{2}$.

c. $E(X)=G'_X(1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}$.

5. $X_1,\ X_2\sim \text{POI}(50)$, dus $E(X)=50$, $\text{Var}(X)=50$ ($\sigma_X=\sqrt{50}\approx7.071$). Laat Y de benaderende normal kansvariabele voorstellen, dus $Y\sim N(50,50)$.

a.
$$\begin{aligned}P(45\le X_1\le 55)&\approx P(44.5\le Y\le 55.5)\\&=P(\tfrac{-5.5}{\sqrt{50}}\le Y\le\tfrac{5.5}{\sqrt{50}})\\&=2\Phi(5.5/\sqrt{50})-1\\&\approx 2\Phi(0.78)-1=2\times0.7823-1=0.5646.\end{aligned}$$

(Excel geeft voor de exacte kans de numerieke waarde 0.56343).

b.
$$\begin{aligned}P(45\le X_1,X_2\le 55)&\approx P(44.5\le Y)P(Y\le 55.5)\\&=P(\tfrac{-5.5}{\sqrt{50}}\le Y)P(Y\le\tfrac{5.5}{\sqrt{50}})\\&=(1-\Phi(5.5/\sqrt{50}))\Phi(5.5/\sqrt{50})\\&\approx(1-0.7823)\times0.7823=0.1703.\end{aligned}$$

(Exacte Poisson-kans volgens Excel: 0.1691)

c. De som van twee onafhankelijke Poisson-verdeelde stochasten is weer Poisson verdeeld, met als parameter de som van de twee afzonderlijke parameters. Dus $X_1+X_2\sim\text{Poi}(100)$.

6. a.

$$\begin{aligned} c\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x &= c\int_0^2 x(2-x)^2\mathrm{d}x \\ &= c\int_0^2 (4x-4x^2+x^3)\mathrm{d}x \\ &= c\left[2x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^2 \\ &= c\left(8-\frac{32}{3}+4\right) = c\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Omdat $c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ moet zijn, is $c = \frac{3}{4}$.

b.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{3}{4}\int_0^2 x^3(2-x)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\int_0^2 (4x^3-4x^4+x^5)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6\right]_{x=0}^2 \\ &= \frac{3}{4}\left(16-\frac{128}{5}+\frac{64}{6}\right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Hiermee wordt

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{20}{25} - \frac{16}{25} = \frac{4}{25},$$

dus $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{2}{5}$.

c.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2-X \le y) = P(X \ge 2-y) = 1 - P(X \le 2-y) = 1 - F_X(2-y).$$

Differentiëren naar y geeft

$$f_Y(y) = f_X(2-y) = (2-y)y^2, \qquad \text{voor } 0 \le y \le 2.$$

7. De mediaan is die x die voldoet aan $F_X(x;\beta) = \frac{1}{2}$. We zoeken dus de oplossing van de vergelijking

$$F_X(x;\beta) = 1 - e^{-(x/\beta)^3} = \frac{1}{2},$$

die gegeven is door

$$x^* = \beta(\log 2)^{\frac{1}{3}}.$$