

Dit tentamen bestaat uit zes vragen, alle op één bladzijde.

Motiveer uw antwoorden. Antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. De waardering in punten staat tussen vierkante haakjes [·] achter het nummer van de opgave. Het maximale aantal te behalen punten is 75. Formuleer correct en volledig; wat onduidelijk, onvolledig of dubbelzinnig is, wordt fout gerekend. In het tentamen wordt een punt ‘.’ gebruikt als decimaalscheider.

1. [5] Stel, A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen waarvan bekend is dat $P(A) = 0.6$ en $P(A \cup B) = 0.8$. Bereken $P(B)$.
2. Een urn bevat 10 knikkers, genummerd 1 t/m 10. Deze worden zonder terugleggen aselect uit de urn getrokken tot de urn leeg is.
 - a. [5] Bepaal de kans dat zich onder de nummers van de laatste drie trekkingen precies één even en twee oneven nummers bevinden.
 - b. [5] Geef de kansverdeling van X , waarbij X de trekking is waarin het tweede oneven getal wordt getrokken.

3. De levensduur X van een bepaald type gloeilamp (in 10^3 branduren) heeft de volgende kansdichtheid

$$f(x) = 3x^2e^{-x^3}, \quad x > 0$$

- a. [5] Bereken de mediaan van deze kansdichtheid.
 - b. [5] Wat is de modus van de kansdichtheid?
 - b. [5] Bepaal de faalintensiteit (hazard rate) van X .
4. Zij X een stochast met de volgende kansgenererende functie:

$$G_X(t) = C(1+t)^3$$

- a. [5] Bepaal de waarde van C .
 - b. [5] Bereken $P(X = 1)$.
 - c. [5] Geef de verwachting van X .
5. Laat X_1 binomiaal verdeeld zijn met parameters $p = 0.4$ en $n = 100$, dus $X \sim \text{BIN}(100, 0.4)$.
 - a. [5] Leid de kansgenererende functie, $G_X(t) = E(t^X)$, af.
 - b. [5] Bepaal met de normale benadering de kans $P(30 \leq X \leq 50)$. Pas hierbij de continuïteitscorrectie toe.
 - c. [5] Indien X_2 onafhankelijk is van X_1 , en $X_2 \sim \text{BIN}(100, 0.3)$, is $X_1 + X_2$ dan ook weer binomiaal verdeeld? Zo ja, welke binomiale verdeling volgt $X_1 + X_2$?
 6. Gegeven is dat X de volgende kansdichtheid heeft: $f_X(x) = cx^{-4}$, voor $x > 2$. Voor $x \leq 2$ is de kansdichtheid nul.
 - a. [5] Bepaal de constante c . Indien u hier niet uitkomt, reken dan verder met $c = 10$.
 - b. [5] Bereken de verwachting en de variantie van X .
 - c. [5] Leid de verdelingsfunctie af voor de stochast Y , waarbij $Y = 1/X$. Bepaal vervolgens de kansdichtheid van Y (denk aan de drager).

Tabellen en overzicht verdelingen op de achterzijde!

Uitwerkingen

1. Wegens de onafhankelijkheid van A en B geldt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.6P(B),$$

en dus ook

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4P(B)$$

We kunnen vervolgens $P(B)$ oplossen uit

$$0.8 = P(A \cup B) = 0.6 + 0.4P(B),$$

waaruit volgt dat $P(B) = 0.5$.

2. a. De kans op even-oneven-oneven (in die volgorde) in de laatste drie trekkingen is $\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{36} \approx 0.13889$. In totaal zijn er 3 onderscheidbare volgorden van deze drie uitkomsten in de laatste drie trekkingen, alle met dezelfde kans, dus is de totale kans op precies één even nummer onder de laatste drie trekkingen gelijk aan

$$\binom{3}{1} \frac{5}{36} = \frac{5}{12} \approx 0.41667.$$

Alternatief: men kan ook kijken naar het aantal manieren waarop men een groepje van 3 knikkers kan selecteren, dat is $\binom{10}{3}$. De gewenste uitkomst kan echter maar op $\binom{5}{1} \binom{5}{2}$ manieren worden gerealiseerd (vijf keuzen voor het even nummer, tien voor de twee oneven nummers), dus is de gevraagde kans

$$\frac{\binom{5}{1} \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12} \approx 0.41667.$$

Nog een andere methode: kijk naar het aantal manieren waarop de 5 even nummers over de twee groepen (in de steekproef van 3, resp. de groep van 7 knikkers daarbuiten) kan worden verdeeld. Dat kan op $\binom{10}{5}$ manieren, waarvan bij $\binom{3}{1} \binom{7}{4}$ aan de eis is voldaan dat er één even nummer in de steekproef zit, dus de gevraagde kans is

$$\frac{\binom{3}{1} \binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{12} \approx 0.41667.$$

- b. De tweede oneven knikker kan worden getrokken in de 2e t/m de 7e trekking, dus we moeten bepalen $P(X = k)$ met $k = 2, \dots, 6$. De tweede oneven knikker kan alleen bij de k de trekking worden getrokken als zich onder de trekkingen ervoor precies 1 oneven bevindt, en daarna drie.

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{1} \binom{1}{1} \binom{10-k}{3}}{\binom{10}{5}} = (k-1) \frac{\binom{10-k}{3}}{\binom{10}{5}}.$$

De bijbehorende kansen zijn $P(X = 2) = \frac{2}{9}$, $P(X = 3) = \frac{5}{18}$, $P(X = 4) = \frac{5}{21}$, $P(X = 5) = \frac{10}{63}$, $P(X = 6) = \frac{5}{63}$, en $P(X = 7) = \frac{1}{42}$. Andere mogelijkheden kunnen niet voorkomen.

3. a. De CDF is $F(x) = \int_0^x 3s^2 e^{-s^3} ds = 1 - e^{-x^3}$. De CDF gelijkstellen aan $1/2$ en oplossen naar x geeft $x_{0.5} = (\log 2)^{\frac{1}{3}} \approx 0.88500$.
- b. De afgeleide van de dichtheid is $(6x - 9x^4)e^{-x^3}$, en deze wisselt voor $x > 0$ één keer van teken (van positief naar negatief) bij $x^3 = \frac{2}{3}$ ofwel $x = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}} \approx 0.87358$, wat dus de modus is.
- c. De faalintensiteit is

$$\frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{3x^2 e^{-x^3}}{e^{-x^3}} = 3x^2.$$

4. a. $G_X(1) = 8C = 1$ dus $C = \frac{1}{8}$.
- b. $P(X = 1) = G'_X(0) = 3C = \frac{3}{8} = 0.375$.
- c. $E(X) = G'_X(1) = 3 \times C \times 4 = 1\frac{1}{2} = 1.5$.

5. a.

$$P(X = k) = \binom{100}{k} (0.4)^k (0.6)^{100-k}$$

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{100} t^k \binom{100}{k} (0.4)^k (0.6)^{100-k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (0.4t)^k (0.6)^{100-k} = (0.4t + 0.6)^{100}.$$

- b. $E(X) = 0.4 \times 100 = 40$, $\text{Var}(X) = np(1-p) = 100 * 0.4 * 0.6 = 24$, dus de benaderende normale verdeling is de $N(40, 24)$ -verdeling. Laat $W \sim N(40, 24)$. Bij benadering geldt dus dat

$$\begin{aligned} P(30 \leq X \leq 50) &= P(29.5 \leq W \leq 50.5) = P\left(\frac{29.5-40}{\sqrt{24}} \leq Z \leq \frac{50.5-40}{\sqrt{24}}\right) \\ &= P(-2.143 \leq Z \leq 2.143) = 2P(Z \leq 2.143) - 1 \approx 2 \times 0.9838 - 1 = 0.9676 \end{aligned}$$

- c. Nee, $X_1 + X_2$ volgt geen binomiale verdeling. Dit is onder andere in te zien door de kansgenererende functie te bekijken

$$G_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = (0.4t + 0.6)^{100}(0.3t + 0.7)^{100},$$

wat niet van de algemene vorm is van de kansgenererende functie van een binomiale stochast $((pt + q)^n)$. Een andere manier om dit in te zien is door een paar kansen te bepalen. De mogelijke uitkomsten van $X_1 + X_2$ lopen van nul tot 200. De vraag is welke BIN(200, p)-verdeling $X_1 + X_2$ zou volgen. We vinden

$$P(X_1 + X_2 = 0) = 0.6^{100} \times 0.7^{100} = \sqrt{0.42}^{200} \approx (0.6481)^{200}.$$

Dit suggereert dus $p \approx 0.6481$. Anderzijds

$$P(X_1 + X_2 = 200) = 0.4^{100} \times 0.3^{100} = \sqrt{0.12}^{200} \approx (0.3464)^{200},$$

wat $p \approx 1 - 0.3464 = 0.6536$ suggereert. Dit geeft dus een tegenspraak.

6. a.

$$\begin{aligned} c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= c \int_2^{\infty} x^{-4} dx \\ &= c \left[-\frac{1}{3} x^{-3} \right]_{x=2}^{\infty} = c/24. \end{aligned}$$

Omdat $c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ moet zijn, is $c = 24$.

- b.

$$\begin{aligned} E(X) &= c \int_2^{\infty} \frac{x}{x^4} dx \\ &= c \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_{x=2}^{\infty} \\ &= \frac{c}{8} = 3. \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} E(X^2) &= c \int_2^{\infty} \frac{x^2}{x^4} dx \\ &= c \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=2}^{\infty} \\ &= \frac{c}{2} = 12. \end{aligned}$$

Hiermee wordt

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12 - 9 = 3.$$

- c. De CDF van X is

$$F_X(x) = \int_2^x \frac{c}{s^4} ds = c \left[-\frac{1}{3} s^{-3} \right]_{s=2}^x = 1 - \frac{8}{x^3}$$

voor $x \geq 2$. De CDF van Y schrijven in termen van die van X geeft:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1/X \leq y) = P(X \geq 1/y) = 1 - P(X \leq 1/y) = 1 - F_X(1/y) = 8y^3$$

voor $0 < y \leq \frac{1}{2}$. Differentiëren naar y geeft

$$f_Y(y) = 24y^2, \quad \text{voor } 0 \leq y \leq \frac{1}{2},$$

en nul elders.