

Dit tentamen bestaat uit zeven vragen, alle op één bladzijde.

**Motiveer uw antwoorden.** Antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. De waardering in punten staat tussen vierkante haakjes [ ] achter het nummer van de opgave. Het maximale aantal te behalen punten is 75. Formuleer correct en volledig; wat onduidelijk, onvolledig of dubbelzinnig is, wordt fout gerekend. In het tentamen wordt een punt ‘.’ gebruikt als decimaalscheider.

1. [5] Stel,  $A$  en  $B$  zijn gebeurtenissen met  $P(A) = 0.9$  en  $P(B) = 0.5$ . Toon aan dat  $P(A \cap B) \geq 0.4$ .
2. Een urn bevat 2 rode, 2 gele en 2 blauwe knikkers. Deze worden zonder terugleggen aselekt uit de urn getrokken tot de urn leeg is.
  - a. [5] Bepaal de kans dat zich onder de eerste drie trekkingen precies één rode, één gele en één blauwe knikker bevinden.
  - b. [5] Geef de kansverdeling van  $X$ , waarbij  $X$  de trekking is waarin de tweede rode knikker wordt getrokken.
3. De levensduur  $X$  van een bepaald type wiellager heeft de volgende kansdichtheid (in  $10^4$  gereden kilometers)

$$f(x) = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0$$

- a. [5] Bereken de mediaan van deze kansdichtheid.
  - b. [5] Wat is de modus van de kansdichtheid?
  - b. [5] Bepaal de faalintensiteit (hazard rate) van  $X$ .
4. Zij  $X$  een stochast met de volgende kansgenererende functie:

$$G_X(t) = C \frac{t(t+1)}{2-t}$$

- a. [5] Bepaal de waarde van  $C$ .
  - b. [5] Bereken  $P(X = 1)$ .
  - c. [5] Geef de verwachting van  $X$ .
5. Beschouw een hypothetische lichte regenbui waarin de regendruppels op de grond neerkomen volgens een Poisson-verdeling met intensiteit 500 druppels per vierkante meter. Laat  $X_1$  staan voor het aantal regendruppels dat valt op een deel van het grondoppervlak  $A_1$  valt, en  $X_2$  het aantal voor  $A_2$ . Gegeven is dat  $A_1$  en  $A_2$  beide 1 vierkante meter groot zijn, en elkaar mogelijk overlappen.
- a. [5] Bepaal, voor het geval dat  $A_1$  en  $A_2$  *niet* overlappen, met de normale benadering de kans  $P(950 \leq X_1 + X_2 \leq 1050)$ . Pas hierbij de continuïteitscorrectie toe.
  - b. [5] Laat  $X_3$  staan voor het aantal druppels dat valt in  $A_1 \cap A_2$ . Zijn  $Y_1 = X_1 - X_3$  en  $Y_2 = X_2 - X_3$  afhankelijk? Zo ja/nee waarom wel/niet?
  - c. [5] Indien  $X_1 + X_2$  een Poisson-verdeling volgt met intensiteit 900, bepaal dan het oppervlak van de doorsnede  $A_1 \cap A_2$ .
6. Gegeven is dat  $X$  de volgende kansdichtheid heeft:  $f_X(x) = cx$ , voor  $0 \leq x \leq 4$ . Buiten het interval  $[0, 4]$  is de kansdichtheid nul.
- a. [5] Bepaal de constante  $c$ . Indien u hier niet uitkomt, reken dan verder met  $c = \frac{1}{4}$ .
  - b. [5] Bereken de verwachting,  $E(X)$ , en de standaarddeviatie,  $\sigma_X$ , van  $X$ .
  - c. [5] Leid de verdelingsfunctie af voor de stochast  $Y$ , waarbij  $Y = 4 - X$ . Bepaal vervolgens de kansdichtheid van  $Y$  (denk aan de drager).

**Tabellen en overzicht verdelingen op de achterzijde!**

## Uitwerkingen

1. De algemene optelregel voor gebeurtenissen  $A$  en  $B$  is (stelling 1.4):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Omdat  $P(A \cup B) \leq 1$  (waarom?) volgt hieruit

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0.9 + 0.5 - 1 = 0.4.$$

2. a. De kans op rood-geel-blauw (in die volgorde) in de eerste drie trekkingen is  $\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times 24 = \frac{1}{15}$ . In totaal zijn er  $3! = 6$  mogelijke volgorden van deze drie kleuren in de eerste drie trekkingen, alle met dezelfde kans, dus is de totale kans op precies één knikker van elke kleur onder de eerste drie trekkingen gelijk aan  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$ .  
Alternatief: men kan ook kijken naar het aantal manieren waarop men een groepje van 3 kan selecteren, dat is  $\binom{6}{3} = 20$ . De gewenste uitkomst kan echter maar op 8 manieren worden gerealiseerd (twee keuzen voor de rode, twee voor de gele en twee voor de blauwe), dus in een fractie  $\frac{8}{20} = 0.4$  van het totaal aantal manieren om 3 knikkers te selecteren is er aan de eis voldaan dat er precies één van elke kleur in het groepje van drie zit.
- b. De tweede rode knikker kan worden getrokken in de 2e t/m de 6e trekking, dus we moeten bepalen  $P(X = k)$  met  $k = 2, \dots, 6$ . De tweede rode knikker kan alleen bij de  $k$ de trekking worden getrokken als zich onder de trekkingen ervoor precies 1 rode bevindt, en daarna geen.

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{1} \binom{6-k}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{(k-1)}{15}.$$

We vinden dus  $P(X = 2) = \frac{1}{15}$ ,  $P(X = 3) = \frac{2}{15}$ ,  $P(X = 4) = \frac{3}{15}$ ,  $P(X = 5) = \frac{4}{15}$  en  $P(X = 6) = \frac{5}{15}$ . Andere uitkomsten kunnen niet voorkomen.

3. a. De CDF is  $F(x) = 2 \int_0^x s e^{-s^2} ds = 1 - e^{-x^2}$ . De CDF gelijkstellen aan  $1/2$  en oplossen naar  $x$  geeft  $x_{0.5} = \sqrt{\log 2}$ .
- b. De afgeleide van de dichtheid is  $(2 - 4x^2)e^{-x^2}$ , en deze wisselt voor  $x > 0$  één keer van teken (van positief naar negatief) bij  $x = \sqrt{1/2}$ , wat dus de modus is.
- c. De faalintensiteit is

$$\frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{2xe^{-x^2}}{e^{-x^2}} = 2x.$$

4. a.  $G_X(1) = 2C = 1$  dus  $C = \frac{1}{2}$ .
- b.  $P(X = 1) = G'_X(0) = \frac{C}{2} = \frac{1}{4}$ .
- c.  $E(X) = G'_X(1) = \frac{1}{2} \left( \frac{2t+1}{2-t} + \frac{t(t+1)}{(2-t)^2} \right) \Big|_{t=1} = \frac{3}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$ .
5.  $X_1, X_2 \sim \text{POI}(50)$ , dus  $E(X) = 50$ ,  $\text{Var}(X) = 50$  ( $\sigma_X = \sqrt{50} \approx 7.071$ ). Laat  $Y$  de benaderende normal kansvariabele voorstellen, dus  $Y \sim N(50, 50)$ .
- a.  $W \equiv X_1 + X_2 \sim \text{POI}(1000)$ , dus  $E(W) = 1000$  en  $\text{Var}(W) = 1000$ , dus  $\sigma_Z = \sqrt{\text{Var}W} = \sqrt{1000} \approx 31.6$ . Laat  $V$  de benaderende normal kansvariabele voorstellen en  $Z$  de standaardnormale.

$$\begin{aligned} P(950 \leq X_1 + X_2 \leq 1050) &\approx P(949.5 \leq V \leq 1050.5) \\ &= P\left(\frac{-50.5}{\sqrt{1000}} \leq Z \leq \frac{50.5}{\sqrt{1000}}\right) \\ &= 2\Phi(50.5/\sqrt{1000}) - 1 \\ &\approx 2\Phi(1.60) - 1 = 2 \times 0.9452 - 1 = 0.8904. \end{aligned}$$

- b.  $Y_1, Y_2$  is het aantal druppels dat in  $A_1$  ( $A_1 \cap A_2$ )  $A_2$  ( $A_1 \cap A_2$ ) valt. Omdat deze gebieden niet overlappen geldt (omdat het hier een Poisson-proces betreft) dat deze kansvariabelen onafhankelijk zijn.
- c. De intensiteit behorend bij een gebied is evenredig aan de oppervlakte ervan, dus heeft  $A_1 \cup A_2$  een oppervlakte van  $900/500 = 1.8$  vierkante meter. De overlap  $A_1 \cap A_2$  is dus  $2 - 1.8 = 0.2$  vierkante meter.

6. a.

$$\begin{aligned} c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= c \int_0^4 x dx \\ &= c \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^4 = 8c. \end{aligned}$$

Omdat  $c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  moet zijn, is  $c = \frac{1}{8}$ .

b.

$$\begin{aligned} E(X) &= c \int_0^4 x^2 dx \\ &= c \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^4 \\ &= c \frac{64}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} E(X^2) &= c \int_0^4 x^3 dx \\ &= c \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^4 \\ &= c 64 = 8. \end{aligned}$$

Hiermee wordt

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9},$$

dus  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{8}}{3} \approx 0.9428$ .

c.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(4 - X \leq y) = P(X \geq 4 - y) = 1 - P(X \leq 4 - y) = 1 - F_X(4 - y).$$

Differentiëren naar  $y$  geeft

$$f_Y(y) = f_X(4 - y) = (4 - y)/8, \quad \text{voor } 0 \leq y \leq 4.$$