KReS1

VGT 6 maart 2009

Locatie: Tentamenzaal B
Duur: 10–12u
Docenten: Katrien Antonio en Luuk Seelen

Instructies:

- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- op een elektronisch rekentoestel na mogen er geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- veel succes!

1. Een continue kansverdeling is gegeven door de dichtheid:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{voor } x \leq 0 \\ kx(1 - \frac{3}{4}x) \quad \text{voor } 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{elders.} \end{cases}$$

   (a) Schets de dichtheid.
   (b) Bereken k.
   (c) Bereken de verwachting van deze verdeling.

Opl. (a) Drager is het interval $[0, 1]$. Parabool met top bij $x = 2/3$, snijdt de x–as bij $x = 0$ en heeft waarde $k/4$ bij $x = 1$.
(b) De constante k vinden we uit:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 k(x - \frac{3}{4}x^2)dx = k\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}k. \end{aligned}$$

Dus: $k = 4$.
(c) Verwachting vinden we uit:

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^1 x(4x - 3x^2)dx = \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

2. Voor een stochast X die de levensduur van een bepaald onderdeel voorstelt, is de volgende verdelingsfunctie gegeven:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{voor } x < 1 \\ 1 - (x-2)^2 \quad \text{voor } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \quad \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

(a) Bepaal de kansdichtheid van X.

(b) Bepaal de betrouwbaarheid $R(x) = P(X > x)$ en de faalintensiteit (hazard rate) van X.

Opl. (a) Kansdichtheid van X wordt gegeven door:

$$f(x) = -2(x-2) = 2(2-x) \text{ voor } x \in [1,2].$$

Dit integreert tot 1, want: $\int_1^2 2(2-x)dx = (4x-x^2)|_1^2 = (8-4-4+1) = 1$.
(b) Voor de betrouwbaarheid vinden we:

$$R(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{voor } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Voor de hazard rate vinden we dan:

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{2(2-x)}{(x-2)^2} = \frac{2}{2-x} \quad \text{voor } 1 \leq x < 2.$$

3. Onderstel dat het netto maandelijks inkomen van een pas afgestudeerde econometrist normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 1500$ euro en standaarddeviatie $\sigma = 200$ euro. Bereken vervolgens de kans dat

   (a) het netto maandloon van een beginnende econometrist minder dan 1200 euro bedraagt;

   (b) het netto inkomen van zo'n econometrist tussen 1400 en 1800 euro ligt;

   (c) een pas afgestudeerde econometrist meer dan 1900 euro verdient;

   (d) geef een interval $[l, u]$ zodat het netto maandloon met kans 95% in dit interval komt te liggen.

Opl. Zij $X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 200)$. We zoeken achtereenvolgens:

(a) Met $Z \sim N(0,1)$ bepalen we:

$$\begin{aligned} P(X < 1200) &= P\left(\frac{X-1500}{200} < \frac{1200-1500}{200}\right) \\ &= P(Z < -3/2) = P(Z < -1.5) \\ &= 0.0668; \end{aligned}$$

(b) We vinden:

$$\begin{aligned} P(1400 < X < 1800) &= P\left(\frac{1400-1500}{200} < Z < \frac{1800-1500}{200}\right) \\ &= P(-0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -0.5) \\ &= P(Z > -1.5) - P(Z < -0.5) \\ &= 1 - P(Z < -1.5) - P(Z < -0.5) \\ &= 1 - 0.0668 - 0.3085 = 0.6247. \end{aligned}$$

(c) Bereken:

$$\begin{aligned} P(X > 1900) &= P(Z > \frac{1900-1500}{200}) \\ &= P(Z > 2) = P(Z < -2) = 0.0228. \end{aligned}$$

(d) We weten dat:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \quad = \quad 0.95.$$

Het gevraagde interval $[l, u]$ is dus gelijk aan: $[1500 - 2 \times 200, 1500 + 2 \times 200] = [1100, 1900]$.

4. Onderstel dat de levensduur van een stofzuiger normaal verdeeld is met een gemiddelde van 6 jaar en een standaarddeviatie van 1 jaar. Onderstel dat er garantie is op de stofzuiger. Hoeveel jaar mag de garantie dan maximaal duren opdat de kans dat de stofzuiger stuk gaat voor de garantie verstreken is, hoogstens 0.2 bedraagt? Wat is de oplossing als de garantie in volledige jaren wordt verleend?

Opl. Noem de duur van de garantie x. We zoeken de grootste x zodat:

$$P(X < x) \quad \leq \quad 0.2.$$

We gaan daarom op zoek naar:

$$\begin{aligned} P(X < x) &= 0.2 \\ &\Downarrow \\ P(Z < \frac{x-6}{1}) &= 0.2, \end{aligned}$$

met $Z \sim N(0,1)$. We vinden uit de tabel: $\Phi^{-1}(0.8) = 0.8416$. Dan is $P(Z \leq -0.8416) = 0.2$. We lossen dan x op uit:

$$\begin{aligned} \frac{x-6}{1} &= -0.8416 \\ &\Downarrow \\ x &= 5.1584. \end{aligned}$$

In gehele jaren kan de garantieperiode maximaal 5 jaar bedragen.

5. De Weibull(β, λ) verdeling is gegeven door:

$$F_X(x) \quad = \quad 1 - \exp\left(-\lambda x^{\beta}\right), \;\; x \geq 0 \text{ en } \lambda, \; \beta > 0.$$

Geef de verdelings– en dichtheidsfunctie van X^{β}? Is dit een gekende verdeling? Zo ja, welke?

Opl. Via de verdelingsfunctie methode vinden we:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(X^{\beta} \leq y) = P(X \leq y^{1/\beta}) \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda (y^{1/\beta})^{\beta}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda y\right) \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Afleiden geeft dan: $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, voor $y \geq 0$. Dit is EXP(λ).