Voortgangstoets Kansrekening en Statistiek 1 **15 februari 2008, 11.00-13.00 uur**

Deze toets bestaat uit vijf vragen.
Schrijf **niet alleen** een antwoord op, leid de uitkomst af of motiveer een antwoord.
Indien u niets opschrijft bij een som, krijgt u 0 punten. Alleen een antwoord leidt tot puntenaftrek.
De waardering in punten staat tussen vierkante haakjes [·] links in de kantlijn.
Het totale aantal punten van deze toets is 80.

Toegestaan: zakrekenmachine, schrijfgerei.

Niet toegestaan: praten, wenken, gebaren, iets doorgeven.

1 [10] Druk $P(V|W)$ uit in $P(V)$, $P(W)$ en $P(W|V)$.

2 Stel $P(A) = P(B) = 1/2$, $P(A \cup B) = 2/3$.

[5] a) Sluiten A en B elkaar uit?

[5] b) Zijn A en B onafhankelijk?

[5] c) Bereken $P(\overline{A} \cap B)$.

[5] d) Bereken $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

3 Met het volgende model wordt soms de verspreiding van een besmettelijke ziekte gemodelleerd. Begin met een doos met b zwarte en r rode ballen. Trek er hier een willekeurig uit. Leg deze vervolgens weer terug, tezamen met c exemplaren van dezelfde kleur.

[10] a) Bepaal de kans dat de eerste twee getrokken ballen rood zijn.

[10] b) Laat zien dat de kans op een zwarte bal in de tweede trekking gelijk is aan die in de eerste trekking.

4 Een autosloperij heeft twintig banden van een bepaalde maat in voorraad. Ze hebben alle nog een redelijk profiel, maar twee hebben er een beschadiging in het canvas. Iemand heeft drie bruikbare banden nodig, maar koopt er vier. Het aantal beschadigde banden dat hij heeft, zullen we met X aangeven.

[10] a) Bepaal de kans dat hij genoeg banden heeft gekocht.

[10] b) Bepaal $E(X)$ en $Var(X)$.

5 [10] Bereken de standaardafwijking van de discrete uniforme verdeling op $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

VGT-week 2, Kansrekening en Statistiek 1, 15 februari 2008, uitwerkingen

1 De formule is: $P(V\,|\,W) = \dfrac{P(V \cap W)}{P(W)} = \dfrac{P(W\,|\,V)P(V)}{P(W)}$

2 a)Nee, want dan zou gelden $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.

b)Wegens $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$ geldt $P(A \cap B) = 1/3 \neq P(A) \cdot P(B)$, dus A en B zijn niet onafhankelijk.

c)$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 1/2 - 1/3 = 1/6$.

d)$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1/3$.

3 Definieer Z_k = `in de k^e trekking wordt een zwarte bal getrokken', en $R_k = \overline{Z}_k$.

a)$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2 \,|\, R_1) = \dfrac{r}{b+r}\dfrac{r+c}{b+c+r}$.

b)$P(Z_2) = P(Z_1)P(Z_2 \,|\, Z_1) + P(R_1)P(Z_2 \,|\, R_1) = \dfrac{b}{b+r}\dfrac{b+c}{b+c+r} + \dfrac{r}{b+r}\dfrac{b}{b+c+r} = \dfrac{b}{b+r}$.

4 a De kans op vier goede banden is (18/20)(17/19)(16/18)(15/17) = 12/19 of

$$P(X=0) = \binom{18}{4}\binom{2}{0}\Big/\binom{20}{4} = \frac{3060}{4845} = \frac{12}{19}$$

$$P(X=1) = \binom{18}{3}\binom{2}{1}\Big/\binom{20}{4} = \frac{1632}{4845} = \frac{32}{95}$$

$$P(X=2) = \binom{18}{2}\binom{2}{2}\Big/\binom{20}{4} = \frac{153}{4845} = \frac{3}{95}$$

De kans op ten hoogste één slechte band is dus 12/19 + 32/95 = 92/95.
De kans op ten minste drie goede banden is dus 92/95 (= 1 − kans op 2 slechte banden).

b Volgens de definitie: $E(X) = 0(12/19) + 1(32/95) + 2(3/95) = 2/5 = 0{,}4$
$Var(X) = 0^2\,(12/19) + 1^2\,(32/95) + 2^2\,(3/95) - 0{,}4^2 = 44/95 - 4/25 = 144/475 = 0{,}3032$

5 $E(X) = \sum_{k=-2}^{2} k\, P(X=k) = \frac{1}{5}\cdot -2 + \frac{1}{5}\cdot -1 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 4 = 0$ (verwachting = symmetriepunt = 0):

$Var(X) = (-2)^2\,(1/5) + (-1)^2\,(1/5) + 0^2\,(1/5) + 1^2\,(1/5) + 2^2\,(1/5) - 0^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$

De standaardafwijking is dus $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.