



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE  
Afdeling Kwantitatieve Economie

---

---

Lineaire Algebra A

Uitwerking Deeltentamen 30 oktober 2006

---

---

**Opgave 1**

(a) Uit  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  en  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  volgt dat  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 0$ .

(b) Er geldt dat  $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  en dus is  $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{6+2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}} = \frac{8}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{80}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**Opgave 2**

(a) De normaalvorm is  $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$  ofwel  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 6$ . De algemene vorm is dus  $x - 2y + 2z = 6$ .

(b) Definieer  $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Dan is  $\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  en dus  $\|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AB}\| = \frac{5}{9} \sqrt{9} = \frac{5}{3}$ .

**Opgave 3**

Er geldt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{\frac{1}{4}II} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{I-2II} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Het gegeven stelsel is dus equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} x_2 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

We vinden  $x_2 = x_5$  en  $x_4 = -2x_5$ . Kies nu  $x_1 = r$ ,  $x_3 = s$ ,  $x_5 = t$ , dan is  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ t \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} =$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ met } r, s, t \in \mathbb{R} \text{ willekeurig.}$$

#### Opgave 4

(a) We moeten de vergelijking  $w^4 = -4$  oplossen. Er geldt dat  $w$  aan deze vergelijking voldoet dan en slechts dan als  $|w^4| = |-4| = 4$ , dus  $|w| = \sqrt{2}$ ; en  $\arg(w^4) = 4 \arg w = \arg(-4) + k \cdot 2\pi = \pi + k \cdot 2\pi$ , dus  $\arg w = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ , voor een of andere gehele  $k$ . We vinden dan de oplossingen

$$w_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i$$

$$w_3 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i$$

$$w_4 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i.$$

(b) Als macht van  $e$  zijn de wortels  $w_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ,  $w_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ ,  $w_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$  en  $w_4 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$ .

#### Opgave 5

(a)  $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ .

(b) Er geldt dat  $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 \geq \|\vec{v}\|^2 - 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + \|\vec{w}\|^2 \geq \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 = (\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|)^2$ , waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. We vinden dan  $\|\vec{v} - \vec{w}\| \geq \sqrt{(\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|)^2} = |\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|$ .