Antwoorden VGT 1 van 1 oktober 2010

Opgave 1

i) A. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is het uitwendig product (cross product) van 2 vectoren.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4\times -1)-(-2\times 0) \\ (-2\times 2)-(1\times -1) \\ (1\times 0)-(4\times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Merk op: $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} = 0$ en $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{v} = 0$

ii) E. Let op: gevraagd is naar de sinus van de hoek niet naar de cosinus.

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1\times -2)+(2\times 1)+(2\times 2)}{\sqrt{9}\times\sqrt{9}} = \frac{4}{9}$$

Met $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ en $\sin\varphi > 0$ geeft dit

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-(16/81)} = \sqrt{(81-16)/81} = \sqrt{65}/9.$$

iii) E. Er moet gelden $\left|\begin{array}{rcr} x+y & = & 2 \\ -x+y & = & 6 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rcr} x+y & = & 2 \\ 2y & = & 8 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ y & = & 4 \end{array}\right|$

Dus $\mathbf{w}$ = -2$\mathbf{u}$ +4$\mathbf{v}$.

iv) C.

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})}$$
$$= \sqrt{(1-2)^2+(4-0)^2+(-2-(-1))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

v) A. Als je de twee vectoren tekent dan zie je dat de projectie van **v** op **u** precies samenvalt met **u**. De vector **v-u** staat nl loodrecht op u. Met berekening:

$$proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u} = \left(\frac{(2\times 1)+(1\times 3)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}\right)\mathbf{u} = \mathbf{u}$$, dus a = 1.

vi) A. Stelling A is niet waar, omdat altijd geldt: rang(A) $\le n$ en rang(A) $\le m$.
Stelling B is niet waar, omdat bijvoorbeeld 2 of meer vergelijkingen hetzelfde vlak kunnen voorstellen en zo een niet-strijdig (consistent) stelsel opleveren.

vii) D. Zie boek blz 26, example 3. Als rang(A) < m dan oneindig veel of 0 oplossingen.

Opgave 2

i) $$\left|\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 1 \\ x+3y+4z & = & 3 \\ x+4y+hz & = & h \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -i) \\ -i) \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{rcl} x+\;2y+3z & = & 1 \\ y+\;\;z & = & 2 \\ 2y+(h-3)z & = & h-1 \end{array}\right| \begin{array}{l} -2ii) \\ \\ -2ii) \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{rcl} x+\qquad z & = & -3 \\ y+\qquad z & = & 2 \\ (h-5)z & = & h-5 \end{array}\right|$$

Als h = 5 dan derde rij met 0 = 0 en rang = 2, dus oneindig veel oplossingen..
Voor $h \neq 5$ dan kunnen we 3 leading 1's maken en dus één unieke oplossing.
Voor geen enkele waarde van h heb je geen oplossingen.

ii) Voor h = 5

$$\left|\begin{array}{rcl} x+\qquad z & = & -3 \\ y+\qquad z & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-t \\ 2-t \\ t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voor $h \neq 5$:

$$\left|\begin{array}{rcl} x+\qquad z & = & -3 \\ y+\qquad z & = & 2 \\ (h-5)z & = & h-5 \end{array}\right| :(h-5) \rightarrow \left|\begin{array}{rcl} x+\quad z & = & -3 \\ y+z & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rcl} x & = & -4 \\ y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array}\right|$$

iii) Gevraagd: schrijf $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ als lineaire combinatie van $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, ofwel vind een x, y en een z

waarvoor geldt $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Dit is al opgelost in ii).

Neem bv t = 0. Ga na dat x = -3, y = 2, z = 0 een goede lineaire combinatie oplevert. En neem bv t = 1. Ga na dat x = -4, y = 1, z = 1 ook een goede lineaire combinatie oplevert.

Opgave 3

i) De normaalvorm van een vlak is **n**·**x** = **n**·**p** (met **n** de normaal vector en **p** een punt op het vlak). De normaalvector staat loodrecht op elke vector in het vlak. Twee vectoren die in het vlak liggen zijn $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}2-1\\-1-1\\3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$ en $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}4-1\\-2-1\\k-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\k-1\end{bmatrix}$. De normaalvector kan nu op twee manieren gevonden worden:

A. Via het uitwendig product (cross product).

$$\mathbf{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\-3\\k-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\times(k-1)-(2\times-3)\\(2\times3)-(1\times(k-1))\\(1\times-3)-(-2\times3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-2k\\7-k\\3\end{bmatrix}$$ en neem bv **p** = $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Ga na dat **n**·**p** = 18-3k ook geldt als voor **p** de vector $\overrightarrow{OB}$ of $\overrightarrow{OC}$ gekozen zou zijn.

B. Via het oplossen van een stelsel met twee vergelijkingen. Deze vergelijkingen volgen uit de eis dat **n**·**b** = 0 en **n**·**c** = 0. Merk verder op dat als **n** een normaal vector is van een vlak dat ook a**n** een normaalvector is van dat vlak. We mogen **n** dus schalen. Neem voor **n** = [n_1, n_2, n_3], dan zijn de voorwaarden:

$$\left|\begin{matrix}n_1-2n_2+\quad 2n_3=0\\3n_1-3n_2+(k-1)n_3=0\end{matrix}\right|-3iii\rightarrow\left|\begin{matrix}n_1-2n_2+\quad 2n_3=0\\3n_2+(k-7)n_3=0\end{matrix}\right|.$$

Op basis van de tweede vergelijking kunnen we n_3 = 3 en n_2 = 7−k kiezen. Hiermee ligt ook n_1 vast: $n_1 = 2n_2 - 2n_3 = 8-2k$.

Op beide manieren komen tot de normaalvorm van het vlak: **n**·**x** = 18-3k.
Ofwel: $(8-2k)x+(7-k)y+3z=18-3k$.

ii) De normaalvorm van een vlak door de oorsprong is **n**·**x** = 0. Dit geldt als k = 6. Ga na dat A en B in het vlak V_1 liggen; er geldt: $-4x+y+3z=0$.

iii) Als (2, 0, 0) op het vlak ligt dan voldoet het aan de normaalvorm **n**·**x** = 18-3k.
$\mathbf{n}\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=(8-2k)\times2+(7-k)\times0+3\times0=16-4k$. Dit is gelijk aan 18-3$k$ voor k = -2. ; er geldt: $12x+9y+3z=24$ ofwel $4x+3y+z=8$.

iv) V_1 en V_2 zijn geen parallelle vlakken en vallen niet samen (ze hebben verschillende normaalvectoren) dus snijden ze elkaar. De gemeenschappelijke punten liggen op een lijn. Twee punten op de lijn zijn als bekend. Dit zijn A en B. Gevraagd wordt dus naar een lijn door A en B. In vectorvorm is dit:

$$\ell:\mathbf{x}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$$