

Herkansing lineaire algebra IV, ?? december 2009

1. Beschouw de volgende matrix A en vector \vec{w}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Toon aan dat \vec{w} een eigenvector van de matrix A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

(b) Toon aan dat -1 een eigenwaarde is van de matrix A .

Bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(c) Aan wat is de derde eigenwaarde van A gelijk?

Uitwerking

(a) $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$ bijbehorende eigenwaarde is 0.

(b) $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim \text{Ker}(A + I_3) \neq 0.$

$\text{Ker}(A + I_3) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, meetkundige en algebraïsche multipliciteit zijn gelijk aan 1.

(c) $\text{Tr}(A) = 0 - 1 + \lambda_3 = 1 \implies \lambda_3 = 2.$

2. Beschouw een 3×3 symmetrische matrix A met een dubbele eigenwaarde, verder geldt

$$\text{Tr}(A) = 6 \text{ en } \text{Ker}(A) = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix A .

(b) Gebruik de spectrale decompositie of een andere methode om de matrix A te bepalen.

Uitwerking

(a) $\text{Ker}(A) \neq \vec{0} \implies 0$ is een eigenwaarde verder is bekend $\text{Tr}(A) = 6 \implies 2\lambda + 0 = 6 \implies \lambda_{2,3} = 3$.

$$\text{Matrix } A \text{ is symmetrisch} \implies E_0 \perp E_3 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \implies$$

$$E_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \implies \text{Gram-Schmidt}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrix $S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ is orthogonaal $\implies S^T S = I_3 \implies S^T = S^{-1}$.

Verder geldt: $SD = SA$ en $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A = SDS^{-1} \implies$

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeven is de vierkante matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix},$$

verder geldt

$$\text{Det}(A - \lambda I_3) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0.$$

(a) Bepaal de getallen a , b en c in matrix A .

(b) Bepaal de eigenwaarden van de matrix A en bijbehorende eigenvectoren, gebruik de berekende waarden van a , b en c in (a).

(c) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zo dat $AP = PD$.

Uitwerking

$$(a) (A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a & -b & -c - \lambda \end{pmatrix} \implies \text{Det} (A - \lambda I_3) = \lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a \implies$$

$$a = 8, b = 4 \text{ en } c = 2 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) f_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) \implies$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2i$ en $\lambda_3 = -2i$.

$$\text{Eigenruimts: } E_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E_{2i} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 \\ 0 & -2i & 1 \\ -8 & -4 & -2i - 2 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ -2i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2i} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ -8 & -4 & 2i - 2 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$(c) D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \text{ en } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2i & 2i \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. (30 punten) Beschouw de kwadratische vorm van 2 variabelen

$$Q(x_1, x_2) = 5x^2 + 4xy + 2y^2.$$

(a) Schrijf $Q(x_1, x_2)$ als $\vec{x}^\top A \vec{x}$ waarbij A een symmetrische matrix is en $\vec{x} = (x_1, x_2)^\top$.

(b) Bepaal een orthonormale eigenbasis \vec{u}_1 en \vec{u}_2 alsook de bijbehorende eigenwaarden λ_1 en λ_2 van de matrix A .

(c) Stel dat $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2$, met de constanten c_1 en c_2 .

Formuleer de kwadratische vorm $Q(x_1, x_2) = \vec{x}^\top A \vec{x}$ in termen van c_1 , c_2 , λ_1 en λ_2 .

(d) Maak een schets van de kromme met vergelijking

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6.$$

Bepaal de snijpunten van deze kromme met de assen.

Uitwerking

$$(a) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \text{Det}(A - \lambda I_2) = \text{Det} \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda_1 = 6 \text{ en } \lambda_2 = 1.$$

$$\text{Eigenvectoren } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \vec{x}^\top A \vec{x} = (c_1 \vec{u}_1^\top + c_2 \vec{u}_2^\top) (c_1 A \vec{u}_1 + c_2 A \vec{u}_2) = (c_1 \vec{u}_1^\top + c_2 \vec{u}_2^\top) (c_1 \lambda_1 \vec{u}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{u}_2) = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2.$$

$$(d) \vec{x}^\top A \vec{x} = 6c_1^2 + c_2^2 = 6 \implies c_1^2 + \frac{c_2^2}{6} = 1 \implies \text{ellips.}$$

5. Zij A een $n \times n$ matrix

Bewijs dat A en A^\top dezelfde eigenwaarden hebben.

Uitwerking

$$\text{Indien } \lambda \in \sigma(A) \implies 0 = \text{Det}(A - \lambda I_n) = \text{Det} \left((A^\top)^\top - \lambda I_n^\top \right)$$

$$= \text{Det} \left(A^\top - \lambda I_n \right)^\top = \text{Det} \left(A^\top - \lambda I_n \right) = \text{Det} (A - \lambda I_n).$$

$$\text{Dit geldt omdat } \text{Det}(B) = \text{Det}(B^\top).$$