Toets lineaire algebra II, 28 november 2008

1. Beschouw de 3×3 matrix $A(t)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+t & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \\ 1 & 1+2t & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de inverse van $A(t)$ voor $t = -1$.

(b) Voor welke waarde(n) van t is de matrix $A(t)$ inverteerbaar.

Uitwerking

(a) $$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow III - I, II - I \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow II + III \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \longrightarrow III/(-2) \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{array}$$

$$\longrightarrow 3III + II, I - III \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$A^{-1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Voor $t \neq 1$ en $t \neq 0$.

2. Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een basis voor het beeld van B, Im (B).

(b) Vind de overbodige kolomvectoren (redundant) en beschrijf de afhankelijkheid met andere vectoren.

(c) Bepaal een basis voor de kern van B, Ker (B).

Uitwerking

(a) Im (B) =span $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) Schrijf $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \Longrightarrow$

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1.\text{of } \vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{0} \qquad (2)$$

$$\vec{v}_5 = \vec{v}_1 + \vec{v}_4 \text{ of } \vec{v}_5 - \vec{v}_1 - \vec{v}_4 = \vec{0} \qquad (3).$$

De vectoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_5$ zijn de overbodige kolomvectoren.

(c) Het opspansel van de kern van de matrix B bestaat uit een aantal basisvectoren die gelijk is aan het aantal overbodige vectoren. Bijgevolg, uit (1), (2) en (3) volgt

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zodanig dat

$$\text{Ker}(B) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3. Bepaal alle inverteerbare matrices W die voldoen aan de volgende matrix gelijkheid

$$W^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uitwerking

De uitdrukking kan ook geschreven worden als : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} W = W \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow 2d = d \Longrightarrow d = 0$ en $c = a/3$. Voor inverteerbaarheid geldt: $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

4. Beschouw de $n \times p$ matrix A en $p \times n$ matrix B, verder geldt $AB = I_n$.

(a) Bewijs dat de kolommen van B lineair onafhankelijk zijn.

(b) Is het mogelijk dat $p < n$? Is het mogelijk dat $p \geq n$? Motiveer uw antwoord.

Uitwerking

(a) Met andere woorden, bewijs dat de kern van de matrix B gelijk is aan nul.

$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(B)$ of $B\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow AB\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow I_n\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

(b) Moet gelden, $\mathrm{rang}(B) = n$, wanneer er meer kolommen zijn dan rijen dan zal de kern niet nul zijn en $\mathrm{rang}(B) \neq n$. Bijgevolg geldt de lineaire onafhankelijkheid niet terwijl wanneer $p \geq n$ dan kan de kern wel nul zijn of $\mathrm{rang}(B) = n$ en bijgevolg geldt de lineaire onafhankelijkheid wel.