Lineaire Algebra A - AEO

Opg 1 Beschouw de matrix $A(h)$ en vector $\vec{b}(h)$ voor verschillende waarden van h,

$$A(h) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ h \end{bmatrix}.$$

a De rang van $A(h)$ hangt van h af. Voor welke waarden van h geldt

$$(i)\ \operatorname{rang}(A) = 1, \ (ii)\ \operatorname{rang}(A) = 2, \ (iii)\ \operatorname{rang}(A) = 3.$$

b Voor welke $h \in \mathbb{R}$ is A inverteerbaar? Indien mogelijk bepaal de inverse van $A(2)$.

c Voor welke $h \in \mathbb{R}$ heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ ∞−veel oplossingen? Vind deze oplossingen.

d Bepaal $\ker(A(h))$. Het antwoord hangt van de waarde van h af.

e Voor welke waarden van h zijn de kolommen van $A(h)$ lineair afhankelijk?
Voor welke $h \in \mathbb{R}$ is $\vec{b}(h)$ een lineaire combinatie van twee kolommen van $A(h)$?

Opl 1 We beginnen met de bepaling van de trapvorm van de uitgebreide matrix $\left[A(h) : \vec{b}(h)\right]$.

$$\left[A(h) : \vec{b}(h)\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & h & : & 1 \\ 1 & h & 1 & : & h \\ h & 1 & 1 & : & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & h & : & 1 \\ 0 & h+1 & h+1 & : & h+1 \\ 0 & h+1 & h^2+1 & : & 2h \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -h & : & -1 \\ 0 & h+1 & h+1 & : & h+1 \\ 0 & 0 & h(h-1) & : & h-1 \end{bmatrix}$$

a Voor h gelijk aan -1, 0 of 1 is er één rij van nullen in de trapvorm van A te vinden. Voor h ongelijk aan één van deze bijzondere waarden zijn er geen nul-rijen. Derhalve

(i) $\operatorname{r}(A)$ is nooit 1, (ii) $\operatorname{r}(A) = 2$ voor $h \in \{-1, 0, 1\}$, (iii) $\operatorname{r}(A) = 3$ voor $h \notin \{-1, 0, 1\}$.

b Een vierkante matrix is inverteerbaar als de rang gelijk is aan de dimensie.

$$[A(2) : I_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & : & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{3}{6} & \frac{-3}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix} \sim \left[I_3 : A^{-1}(2)\right]$$

c Het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft ∞−veel oplossingen als $\operatorname{r}(A : b) = \operatorname{r}(A) < n$. In deze opgave zijn er dus ∞−veel oplossingen als $h \in \{-1, 1\}$. Voor $h = 0$ zijn er geen oplossingen.

$$h = -1 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 1 & -1 & 1 & : & -1 \\ -1 & 1 & 1 & : & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

en de oplossingen zijn $\vec{x}(-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

$h=1$ $\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 1 & : & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & : & -1 \\ 0 & 2 & 2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$

en de oplossingen zijn $\vec{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

d $\ker(A(h)) = \left\{\vec{0}\right\}$ als $\mathrm{r}(A) = n = 3$, dus voor $h \notin \{-1, 0, 1\}$.

$\ker(A(-1)) = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\ker(A(1)) = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\ker(A(0)) = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

e De kolommen van A zijn lineair afhankelijk desda $\ker(A) \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

$\vec{b}$ is een lineaire combinatie van twee kolommen van A voor $h \in \{-1, 1\}$.

De unieke oplossing in geval (iii) heeft geen nul-coördinaten, $\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{h-1}{h} \\ \frac{h-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{bmatrix}$.

Opg 2 In $\mathbb{R}^3$ gegeven zijn de punten $A = (-1, 2, 2)$, $B = (2, -1, 2)$ en $C = (2, 2, -1)$.

a Bereken de lengte van de lijnstukken $\overline{AB}$ en $\overline{BC}$. Bepaal de hoek $\measuredangle ABC$.

b Bereken de oppervakte van ΔABC.

c Bepaal een vergelijking van het vlak V door de punten A, B en C.

d Vind op de lijn die loodrecht op V staat en door $P = (A + B + C)/3$ loopt, punten die even ver van A, B en C liggen als deze drie punten van elkaar.

e $\Delta ABCD$, met D één van de punten gevonden in **e**, is een gelijkzijdige piramide. Bereken het volume van deze piramide (=1/3*hoogte*oppervlakte van de basis).

Opl 2

a $\|\overline{AB}\| = \|\overline{BC}\| = 3\sqrt{2}$. $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{9}{3\sqrt{2}3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ zo dat $\measuredangle ABC = \frac{\pi}{3}$.

b $\text{Area}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right\| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

c $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$ staat loodrecht op beide vectoren en is dus een normaalvector van V.
De vergelijking $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot A = \vec{n} \cdot B = \vec{n} \cdot C$ wordt hier $x + y + z = 3$.

d $\|D - A\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|^2 = 6 + 3t^2 = 18$ zodat $D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ of $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

e $h = \|D - P\| = 2\sqrt{3}$ zodat $\text{Volume}(\Delta ABCD) = \frac{1}{3} * \frac{9\sqrt{3}}{2} * 2\sqrt{3} = 9$.

Opg 3 In $\mathbb{R}^3$ gegeven zijn vectoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en de deelruimte $V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

a Vind een vector $\vec{v}_3$ die loodrecht op V staat en even lang is als $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.

b Zij T een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ die op de vectoren in V werkt als de draaiing over de hoek van $\pi/2$ met de klok mee als je naar V kijkt vanaf $\vec{v}_3$, en $\vec{v}_3$ zelf onveranderd laat. Bepaal de matrix B van T t.o.v. de basis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

(denk aan de rechterhand regel).

c Vind de standaardmatrix A van de transformatie T (t.o.v. de basis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$).

Opl 3 a $\vec{v}_3 = \frac{\|\vec{v}_1\|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b $T(\vec{v}_1) = -\vec{v}_2,\ T(\vec{v}_2) = \vec{v}_1,\ T(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$ zodat $B = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c $A = [T]_{\mathcal{E}} = SBS^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$.

opmerking In dit bijzonder geval geldt $S^{-1} = \frac{1}{9}S$.

Opg 4 Zij R_θ de 2×2 matrix van de draaiing in $\mathbb{R}^2$ over de hoek θ tegen de klok in en S de 2×2 matrix van de spiegeling ten opzichte van een lijn L. Dan geldt

$$P = SR_\theta SR_\theta = I_2 \qquad (\#)$$

a Kies een vector $\vec{u}$ op L, een vector $\vec{v}$ loodrecht op L, neem $\theta = \pi/4$ en laat op twee aparte schetsen zien hoe het viertal matrices van (#) vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ transformeert.

Leg uit waarom dit volstaat als een meetkundig bewijs van (#).

b Bewijs (#) met behulp van matrixproducten. Je mag nog steeds $\theta = \pi/4$ stellen.

c Bewijs met behulp van de gelijkheid (#) dat de matrices R_θ en $R_{-\theta}$, van de draaiingen over de hoek θ, respektievelijk tegen en met de klok, gelijksoortig zijn.

Opl 4 a Het paar van loodrechte vectoren $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ vormt een basis in $\mathbb{R}^2$. Op de schets is te zien dat $P\vec{u} = \vec{u}$ en $P\vec{v} = \vec{v}$. P als een samenstelling van lineaire transformaties is zelf ook een lineaire transformatie. Derhalve voor elke $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt

$$P\vec{x} = P(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha P\vec{u} + \beta P\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{x} = I\vec{x}.$$

b $P = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b & -a+b \\ -a+b & -a-b \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vanwege $a^2 + b^2 = 1$ voor de matrix van een spiegeling.

c Uit $S^{-1} = S,\ R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ en (#) volgt $SR_\theta S^{-1} = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Opg 5 Welke van de onderstaande beweringen zijn waar, welke niet waar?
Geef bij elk antwoord een korte motivatie van de geëigende soort.

a Er bestaat een paar van 2×2 matrices A en B zodanig dat

$$AB = I_2 \quad \text{en} \quad BA \neq I_2.$$

b Er bestaat een 3×3 matrix A van rang 2 zodanig dat $A^2 = O_3$.

c Voor alle paren inverteerbare $n \times n$ matrices A en B geldt

$$AB \text{ en } BA \text{ zijn gelijksoortige matrices.}$$

Opl 5

a Niet waar.
Voor vierkante matrices A en B geldt dat ze de inverse van elkaar zijn als het product gelijk is aan de identiteit matrix. Derhalve

$$[AB = I_2] \iff \left[A^{-1} = B\right] \iff \left[AA^{-1} = A^{-1}A = I\right] \iff [BA = I_2].$$

b Niet waar.
$\left[A^2 = O_3\right] \iff \left[A^2\vec{x} = A\,(A\vec{x}) = \vec{0} \text{ voor elke } \vec{x} \in \mathbb{R}^3\right] \iff [\mathrm{im}\,(A) \subseteq \ker\,(A)]$.
$2 = \mathrm{rang}\,(A) = \dim\,(\mathrm{im}\,(A)) \leq \dim\,(\ker\,(A)) = 3 - \dim\,(\mathrm{im}\,(A)) = 1$,
vanwege de dimensiestelling. Een tegenspraak.

c Waar

$$\begin{aligned} A^{-1}\,(AB)\,A &= \left(A^{-1}A\right)BA = IBA = BA, \\ &\text{of} \\ B\,(AB)\,B^{-1} &= BA\left(BB^{-1}\right) = BAI = BA. \end{aligned}$$