Propaedeuse AEO - Lineaire Algebra A - Herkansing

Opg 1 Beschouw de matrix $A(h)$ en vector $\vec{b}(h)$ voor verschillende waarden van h

$$A(h) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ -1 & h & -1 \\ h & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+h \\ h \end{pmatrix}.$$

a Bepaal de gereduceerde trapvorm van $\left(A : \vec{b}\right)$, afhankelijk van de waarde van h.

b Voor welke waarden van h heeft het stelsel $A\vec{v} = \vec{b}$

(***i***) 1 oplossing, (***ii***) geen oplossingen, (***iii***) $\infty-$veel oplossingen?

Vind de unieke oplossing in geval (***i***). Vind alle oplossingen in geval (***iii***).

c Voor welke waarden van h is A inverteerbaar? Bepaal de inverse van A voor $h = 3$.

Oplossing a $\left(A(h) : \vec{b}(h)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h & : & 1 \\ -1 & h & -1 & : & 1+h \\ h & -1 & 1 & : & h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & h & : & 1 \\ 0 & h-1 & h-1 & : & 2+h \\ 0 & h-1 & 1-h^2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & h & : & 1 \\ 0 & h-1 & h-1 & : & 2+h \\ 0 & 0 & 2-h-h^2 & : & -2-h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & h & : & 1 \\ 0 & h-1 & h-1 & : & h+2 \\ 0 & 0 & (h-1)(h+2) & : & h+2 \end{pmatrix}.$$

$$h = 1 \qquad rref\left(A(1) : \vec{b}(1)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix},$$

$$h = -2 \qquad rref\left(A(-2) : \vec{b}(-2)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix},$$

$$h \neq \{1, -2\} \qquad rref\left(A(h) : \vec{b}(h)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & h/(h-1) \\ 0 & 1 & 0 & : & (h+1)/(h-1) \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/(h-1) \end{pmatrix}.$$

b (***i***) een unieke oplossing als $r(A) = 3$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} h/(h-1) \\ (h+1)/(h-1) \\ 1/(h-1) \end{pmatrix}$, $h \neq \{1, -2\}$,

(***ii***) geen oplossingen als $r(A) < r\left(A : \vec{b}\right)$, d.w.z. voor $h = 1$,

(***iii***) $\infty-$veel oplossingen als $r(A) = r\left(A : \vec{b}\right) < 3$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h = -2$.

c A is inverteerbaar in geval (***i***), d.w.z. voor $h \neq \{1, -2\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & : & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & : & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & .5 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & .4 & .1 & -.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -.1 & .1 & .4 \\ 0 & 1 & 0 & : & .1 & .4 & .1 \\ 0 & 0 & 1 & : & .4 & .1 & -.1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opg 2 Voor de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^n$ geldt het volgende feit

$$(\#) \qquad \|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}-\vec{w}\| \iff \vec{v}\perp\vec{w}.$$

a Maak een schets van deze situatie in $\mathbb{R}^2$. Bewijs $(\#)$.

b Controleer beide kanten van $(\#)$ voor de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

Bepaal de hoek tussen $\vec{v}+\vec{w}$ en $\vec{v}-\vec{w}$.

Bereken de oppervlakte van de driehoek met zijden $\vec{v}+\vec{w}$ en $\vec{v}-\vec{w}$.

c Vind de matrix van de orthogonale projectie op het vlak V opgespannen door $\vec{v}$ en $\vec{w}$, (met behulp van een vector $\vec{u}$ die loodrecht staat op $\vec{v}$ en $\vec{w}$.)

Opl 2 a $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}-\vec{w}\| \iff ((\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})) = ((\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})) \iff$
$(\vec{v}\cdot\vec{v}) + 2\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) + (\vec{w}\cdot\vec{w}) = (\vec{v}\cdot\vec{v}) - 2\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) + (\vec{w}\cdot\vec{w}) \iff (\vec{v}\cdot\vec{w}) = 0 \iff \vec{v}\perp\vec{w}.$

b $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = 10\sqrt{2},\ \|\vec{v}-\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 10\sqrt{2},\ (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = 100.$

$\cos\angle(\vec{v}+\vec{w},\vec{v}-\vec{w}) = 100/\left(10\sqrt{2} * 10\sqrt{2}\right) = 1/2,\ \measuredangle(\vec{v}+\vec{w},\vec{v}-\vec{w}) = \pi/3.$

area $\triangle = \frac{1}{2}\|(\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}-\vec{w})\| = \frac{1}{2}|\sin\angle(\vec{v}+\vec{w},\vec{v}-\vec{w})|\,\|\vec{v}+\vec{w}\|\,\|\vec{v}-\vec{w}\| = 50\sqrt{3}.$

c $\vec{u} = (\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}-\vec{w})\,/\,\|(\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}-\vec{w})\| = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

$$P_{\vec{u}} = \vec{u}\vec{u}^T = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 49 & -7 & -35 \\ -7 & 1 & 5 \\ -35 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \qquad P_V = I - P_{\vec{u}} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 26 & 7 & 35 \\ 7 & 74 & -5 \\ 35 & -5 & 50 \end{pmatrix}.$$

Opg 3 Zij $\mathcal{B} = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ de basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ uit opgave 2.

a Zij R de lineaire transformatie in $\mathbb{R}^3$ zo danig dat $R(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w}$, $R(\vec{v}+\vec{w}) = 2\vec{w}$ en $R(\vec{u}) = \vec{u}$. Vind de matrix $[R]_{\mathcal{B}}$ van R ten opzichte van $\mathcal{B}$.

b Vind de matrix van R ten opzichte van de standaardbasis.

Opl 3 a Uit $R(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w}$ en $R(\vec{v}+\vec{w}) = 2\vec{w}$ volgt
$R(\vec{v}) = \frac{1}{2}(R(\vec{v}-\vec{w}) + R(\vec{v}+\vec{w})) = \frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{w}+2\vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w},$
$R(\vec{w}) = \frac{1}{2}(R(\vec{v}+\vec{w}) - R(\vec{v}-\vec{w})) = \frac{1}{2}(2\vec{w}-\vec{v}-\vec{w}) = \frac{-1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.$

$$[R]_{\mathcal{B}} = ([\vec{u}]_{\mathcal{B}}\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}}\,[\vec{w}]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b $$[R] = S\,[R]_{\mathcal{B}}\,S^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Opg 4 Zij $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ drie lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^3$. Voor de 3×3 matrix B geldt dat alle oplossingen van het stelsel $B\vec{x} = \vec{w}$ zijn van de vorm $\vec{x} = \vec{u} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$.

a Welke van de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ spannen $\ker(B)$ op?

b Wat zijn de dimensies van $\ker(B)$ en van $\operatorname{im}(B)$?

c Het is nu ook gegeven dat $B^3 = O$. Laat zien dat uit $B^3\vec{u} = \vec{0}$ volgt dat

$$B\vec{w} = c\vec{v} \text{ voor een zeker getal } c.$$

Welke van de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ spannen $\operatorname{im}(B)$ op?

Opl 4 a $\ker(B) = \left\{x \mid B\vec{x} = \vec{0}\right\} = \operatorname{span}(\vec{v})$

b $\dim\ker(B) = 1,\ \dim \operatorname{im}(B) = 2$ (de som van deze dimensies moet 3 zijn.)

c $B^3 = O \implies B^3\vec{u} = \vec{0} \implies BB^2\vec{u} = \vec{0} \implies B^2\vec{u} \in \ker(B)$.

$\vec{w} = B\vec{u} \implies B\vec{w} = B^2\vec{u} \in \ker(B) \implies B\vec{w} = c\vec{v}$ voor een zeker getal c.

Hieruit volgt dat zowel $\vec{w}$ als $\vec{v}$ tot $\operatorname{im}(B)$ behoren.

Ze zijn lineair onafhankelijk, dus vormen ze een basis van $\operatorname{im}(B)$ die dimensie 2 heeft.