

Lineaire Algebra A - Toets 1 - 25-09-2009

**Opgave 1** (40) Zij  $\Delta$  de driehoek met de hoekpunten  $\mathbf{A}(2, -2, -1)$ ,  $\mathbf{B}(3, 2, 0)$  en  $\mathbf{C}(5, -5, -1)$ .

- a Bepaal de hoek  $BAC$  (in radialen).
- b Bepaal de oppervlakte van  $\Delta$ .
- c Vind een vergelijking in normale vorm van het vlak  $\mathbf{V}$  door de punten  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{C}$ .
- d Bereken de afstand vanaf de oorsprong  $\mathbf{O}(0, 0, 0)$  tot het vlak  $\mathbf{V}$ .
- e Vind het snijpunt met  $\mathbf{V}$  van de lijn door de oorsprong die loodrecht op  $\mathbf{V}$  staat.

**Oplossing 1**

a Zij  $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Stel  $\angle BAC = \alpha$ . Dan  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\| \|\vec{c}\|} = \frac{3 - 12 + 0}{\sqrt{18}\sqrt{18}} = \frac{-1}{2}$ , zo dat  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .

b  $\text{Area}(\Delta) = \frac{1}{2} \|\vec{b} \times \vec{c}\| = \frac{1}{2} |\sin \alpha| \|\vec{b}\| \|\vec{c}\| = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} (3\sqrt{2}) (3\sqrt{2}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

c Alle normale vectoren van  $\mathbf{V}$  staan loodrecht op  $\vec{b}$  en  $\vec{c}$ , bij voorbeeld het kruisproduct.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 * 1 - 0 * 4 \\ 0 * 1 - 3 * 1 \\ 3 * 4 - (-3) * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} + \mathbf{y} - 5\mathbf{z} = 5\} \quad (\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OC} = 5).$$

d  $d(\mathbf{O}, \mathbf{V}) = \frac{|0 - 5|}{\|\vec{n}\|} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ .

e De lijn  $\ell = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$  loopt door de oorsprong en staat loodrecht op  $\mathbf{V}$ . Het snijpunt

$\mathbf{P}$  van  $\ell$  met  $\mathbf{V}$  voldoet aan de vergelijking van het vlak, dat wil zeggen als

$$t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 5. \text{ Hieruit volgt } t = \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{P} = \frac{5}{27} (1, 1, -5).$$

**opmerking**  $d(\mathbf{O}, \mathbf{P}) = \left\| \frac{5}{27} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{27} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5\sqrt{3}}{9} = d(\mathbf{O}, \mathbf{V}).$

**Opgave 2** (40) Gegeven is het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + z = c \\ -x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

- a Vind de gereduceerde trapvorm van de uitgebreide matrix  $(A | \vec{b})$  van het stelesel.
- b Voor welke  $c$  is het stelsel oplosbaar? Voor welke  $c$  is er een unieke oplossing?
- c Geef alle oplossingen in de vectorvorm in het geval dat de oplossing niet uniek is.
- d Voor welke waarde van  $c$  is  $\vec{b}$  een lineaire combinatie van de kolommen van  $A$ ?
- e Schrijf  $\vec{b}$  op twee manieren op als een lineaire combinatie van de kolommen van  $A$ .

**Oplossing 2**

$$\begin{aligned} \text{a } (A | \vec{b}) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 1 & 0 & 1 & : & c \\ -1 & -3 & 2 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \\ \cdot \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & c \\ 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ -1 & -3 & 2 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ -2I \\ +I \end{pmatrix} \simeq \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & c \\ 0 & 3 & -3 & : & 1-2c \\ 0 & -3 & 3 & : & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ * \\ +II \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & c \\ 0 & 1 & -1 & : & (1-2c)/3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2-c \end{pmatrix} = \mathbf{rref}(A | \vec{b}). \end{aligned}$$

- b Het stelsel is oplosbaar alleen voor  $c = 2$ .

De oplossing is niet uniek (geen leidende 1 in derde kolom).

$$\text{c Voor } c = 2 \text{ de oplossingen zijn } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- d  $\{\vec{b} \text{ is een lineaire combinatie van de kolommen van } A\} \iff \{(A | \vec{b}) \text{ is oplosbaar}\}.$

$$\text{e Voor } \mathbf{A} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \text{ en } \vec{b} \in \mathbb{R}^m \text{ geldt } \{\mathbf{A}\vec{v} = \vec{b}\} \iff \{\vec{b} = v_1\vec{a}_1 + \dots + v_n\vec{a}_n\}$$

$$\text{Voor } c = 2 \text{ geldt } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{t=0}{=} 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \stackrel{t=1}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 3** (20) Zij  $A$  een  $m \times n$  matrix met  $m \neq n$  (geen vierkant) en rang  $2$  (twee leidende enen in  $\mathbf{rref}(A)$ ). We vragen ons af hoe  $\mathbf{rref}(A)$  eruit kan zien in de volgende gevallen. Zet waar nodig is een  $0$  of een  $1$  en geef een willekeurig getal met een sterretje  $(*)$  aan.

- a Het homogene stelsel  $(A \mid \vec{0})$  heeft alleen de  $\vec{0}$  oplossing. Wat kunnen  $m$  en  $n$  zijn? Beredeneer dat dan een  $\vec{b}$  bestaat zodanig dat het stelsel  $(A \mid \vec{b})$  strijdig is.
- b Het stelsel  $(A \mid \vec{b})$  oplosbaar is voor elke  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . Wat kunnen nu  $m$  en  $n$  zijn? Beredeneer dat het homogene stelsel  $(A \mid \vec{0})$  dan meervoudige oplossingen heeft.

**Oplossing 3**

- a  $\{(A \mid \vec{0}) \text{ heeft alleen de } \vec{0} \text{ oplossing}\} \iff \{\text{een leidende } 1 \text{ in elke kolom van } \mathbf{rref}(A)\}$ .

Voor een niet vierkante matrix  $A$  van rang  $2$  is dit mogelijk alleen als  $n = 2$  en  $m > n = 2$ . Dan moet  $\mathbf{rref}(A)$  als volgt zijn.

$$\mathbf{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(A \mid \vec{b})$  is dan oplosbaar alleen voor de vectoren  $\vec{b}$  die te schrijven zijn als een lineaire combinatie van de twee kolommen van  $A$ . Deze verzameling vormt een vlak in  $\mathbb{R}^m$ . Dit is slechts een kleine (dunne) deelverzameling van  $\mathbb{R}^m$  als  $m > 2$ .

- b  $\{(A \mid \vec{b}) \text{ oplosbaar is voor elke } \vec{b} \in \mathbb{R}^m\} \iff \{\text{een leidende } 1 \text{ in elke rij van } \mathbf{rref}(A)\}$ .

Voor een niet vierkante matrix  $A$  van rang  $2$  is dit mogelijk alleen als  $m = 2$  en  $n > m = 2$ . De leidende enen kan je dan in twee willekeurige kolommen plaatsen.

Dit kan op  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  manieren. Bij voorbeeld voor  $n = 3$  hebben we

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De  $\vec{0}$  vector is altijd een oplossing van het homogene stelsel  $(A \mid \vec{0})$ . Vanwege de vrije variabelen in  $\mathbf{rref}(A)$  (die corresponderen met de kolommen zonder leidende enen) zijn er nu ook oneindig veel andere oplossingen.