

Propaedeutische AEO - Lineaire Algebra A - Deeltentamen 1

Opg 1 Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met de parameter $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} hx & + & z & = & 2 \\ & hy & + & 4z & = & 8 \\ x & + & 2y & + & hz & = & -6 \end{cases}$$

a Schrijf het stelsel in de vorm $A\vec{v} = \vec{b}$. De gereduceerde trapvorm van $(A : \vec{b})$ hangt van h af. Bepaal deze vorm in alle gevallen waarin de rang van A kleiner is dan 3.

b Voor welke waarden van h heeft het stelsel

(i) 1 oplossing, (ii) geen oplossingen, (iii) ∞ -veel oplossingen?

Schrijf alle oplossingen in geval (iii) op m.b.v. vectoren met gehele coördinaten.

c Voor welke waarden van h is \vec{b} een lineaire combinatie is van de kolommen van A ?

Zo ja, van welke kolommen? Voor welke waarden van h is een kolom van A een lineaire combinatie van de overige kolommen? Zo ja, welke kolom?

Opl 1 a
$$\begin{pmatrix} h & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & h & 4 & : & 8 \\ 1 & 2 & h & : & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & : & -6 \\ 0 & h & 4 & : & 8 \\ 0 & -2h & 1-h^2 & : & 2+6h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & : & -6 \\ 0 & h & 4 & : & 8 \\ 0 & 0 & 9-h^2 & : & 18+6h \end{pmatrix}.$$

De rang van A is kleiner dan 3 als op de diagonale van de trapvorm (een boven-driehoekige matrix) een nul staat. Dit is het geval als $h = 0, 3$ of -3 .

$$h = 0 : (A : b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & : & -6 \\ 0 & h & 4 & : & 8 \\ 0 & 0 & 9-h^2 & : & 18+6h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & -6 \\ 0 & 0 & 4 & : & 8 \\ 0 & 0 & 9 & : & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix},$$

$$h = 3 : (A : b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & -6 \\ 0 & 3 & 4 & : & 8 \\ 0 & 0 & 0 & : & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & -6 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & : & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & : & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{pmatrix},$$

$$h = -3 : (A : b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & -6 \\ 0 & -3 & 4 & : & 8 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & -6 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & : & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & : & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & : & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

b Het stelsel is oplosbaar indien $r(A) = r(A : b)$, uniek oplosbaar als ook $r(A) = n$.

(i) $r(A) = r(A : b) = 3$ geldt voor alle getallen h behalve 0, 3 en -3,

(ii) $r(A) < r(A : b)$ geldt alleen voor $h = 3$,

(iii) $r(A) = r(A : b) < 3$ geldt voor $h = 0$ of -3 .

$$h = 0 : \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h = -3 : \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c $\left[\vec{b} \text{ is een lineaire combinatie van de kolommen van } A \right] \iff \left[\text{Het stelsel } (A : \vec{b}) \text{ is oplosbaar} \right]$.

$$h \neq \{-3, 0, 3\} : \vec{v} = \frac{1}{h-3} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ zodat } \vec{b} = \frac{1}{h-3} (2\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2 - 6\vec{v}_3).$$

$$h = 0 : \vec{b} = -6\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 \text{ of } \vec{b} = 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3, \quad h = -3 : \vec{b} = \frac{1}{3}(-2\vec{v}_1 - 8\vec{v}_2) \text{ of } \vec{b} = 2\vec{v}_3.$$

[Een kolom van A is een lineaire combinatie van de overige kolommen] $\iff [r(A) < n = 3]$.

$$h = 0 : \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1, \quad h = 3 : \vec{v}_3 = \frac{1}{3}(\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2), \quad h = -3 : \vec{v}_3 = \frac{-1}{3}(\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2).$$

Opg 2 Voor de vectoren \vec{v} en \vec{w} in \mathbb{R}^n geldt het volgende feit

$$(\#) \quad (\vec{v} + \vec{w}) \perp (\vec{v} - \vec{w}) \iff \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|.$$

a Maak een schets van deze situatie in \mathbb{R}^2 . Bewijs (#).

b Controleer beide kanten van (#) voor de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 .

Bepaal de hoek tussen \vec{v} en \vec{w} en de oppervlakte van de driehoek met zijden \vec{v} en \vec{w} .

c Zij S de spiegeling ten opzichte van het vlak V zodanig dat $S(\vec{v}) = \vec{w}$. Vind een normaalvector \vec{u} van V . Bepaal achtereenvolgens matrix P van de projectie op de lijn $L = t\vec{u}$, matrix Q van de projectie op het vlak V , matrix S van de spiegeling t.o.v. V .

Opl 2 a De vectoren $\vec{v} + \vec{w}$ en $\vec{v} - \vec{w}$ zijn de diagonalen van de parallellogram met de zijden \vec{v} en \vec{w} . De diagonalen staan loodrecht op elkaar als de zijden even lang zijn (een ruit).

$$(\#) \quad (\vec{v} + \vec{w}) \perp (\vec{v} - \vec{w}) \iff (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0 \iff \\ \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{w} = 0 \iff \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 = 0 \iff \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|.$$

b Voor de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ geldt $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 5\sqrt{2}$ en verder

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ met } (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 15 - 40 + 25 = 0.$$

Uit $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 5\sqrt{2}$ volgt dat de driehoek $\triangle(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} - \vec{w})$ gelijke zijden heeft,

$$\text{zo dat } \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \pi/3 \text{ en } \text{opp}(\triangle) = \frac{\sqrt{3}(5\sqrt{2})^2}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

Je kunt ook bereken dat $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ en dat

$$\text{opp}(\triangle) = \frac{1}{2} \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -35 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{2} \left\| \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5 * \sqrt{75}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

c $\vec{u} = \frac{\vec{v} - \vec{w}}{\|\vec{v} - \vec{w}\|} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ is een normaalvector van lengte 1 van het vlak V .

$$P = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 9 & -12 & 15 \\ -12 & 16 & -20 \\ 15 & -20 & 25 \end{pmatrix}, \quad Q = I - P = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 41 & 12 & -15 \\ 12 & 34 & 20 \\ -15 & 20 & 25 \end{pmatrix},$$

$$S = 2Q - I = I - 2P = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 32 & 24 & -30 \\ 24 & 18 & 40 \\ -30 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opg 3 Voor de sinus en cosinus van 2θ en 3θ gelden de volgende formules

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
$\sin 3\theta = \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1)$	$\cos 3\theta = \cos \theta (1 - 4 \sin^2 \theta)$

- a Bewijs deze formules met behulp van de matrix R van de draaiing over hoek θ .
- b Vind alle mogelijke waarden van $\cos \theta$ voor een hoek θ waarvoor geldt $\sin 2\theta = \sin 3\theta$.
- c Vind alle mogelijke waarden van θ tussen 0 en π waarvoor geldt $\sin 2\theta = \sin 3\theta$.
(Hint: voor welke waarden van γ geldt dat $\sin \alpha = \sin \beta$ indien $\alpha + \beta = \gamma$?)
Bij welke hoeken tussen 0 en π behoren de waarden van cosinus gevonden in (b)?

Opl 3 a Met behulp van de herhaalde draaiing over de hoek θ berekenen we achtereenvolgens

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta (1 - 4 \sin^2 \theta) \\ \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \end{pmatrix}.$$

b $\sin 2\theta = \sin 3\theta \iff 2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \iff \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1) = 0$.

Deze vergelijking heeft drie oplossingen: $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$, $\cos \theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Verder geldt dat $\sin \theta = 0 \iff \cos \theta = 1$ of $\cos \theta = -1$.

c $\sin \alpha = \sin \beta$ geldt als (i) $\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, of als (ii) $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $3\theta = 2\theta + 2k\pi \implies \theta = 2k\pi$ met $\theta_0 = 0$ als de enige oplossing tussen 0 en π ,

(ii) $2\theta + 3\theta = 5\theta = \pi + 2k\pi$ heeft 3 oplossingen tussen 0 en π , $\theta_1 = \pi/5$, $\theta_2 = 3\pi/5$, $\theta_3 = \pi$.

Een vergelijking van (b) met (c) levert de volgende waarden van cosinus op

$$\cos(\pi/5) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \quad \cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos(3\pi/5) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$