



Kwantitatieve Economie / Faculteit Economie en Bedrijfskunde / Universiteit van Amsterdam

Tentamen Lineaire Algebra A (met uitwerking)

Maandag 22 maart 2010, van 14:00 tot 17:00 (5 opgaven)

- Schrijf je naam en studentnummer op alles dat je inlevert.
 - Licht antwoorden bondig toe! Geen toelichting = geen punten.
 - Elke deelopgave is 6 punten waard. Er zijn in totaal 90 punten te behalen. Een voldoende is 45 punten of meer.
-

Opgave 1 [24 punten]:
Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3+h \\ 0 & 1 & 1 & 2-h \\ 2 & 0 & h & 4 \end{bmatrix},$$

waar $h \in \mathbb{R}$ een parameter is.

- a) Beredeneer dat het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ voor geen enkele $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ een unieke oplossing heeft.
Uitwerking: Bij een unieke oplossing is de dimensie van kern gelijk aan nul. De dimensie van de kern is het aantal kolommen van A minus de rang van A . De rang is maximaal drie, dus de dimensie van de kern is minimaal één.
- b) Wat is de rang van A ? (Het antwoord hangt af van h .)
Uitwerking: Reduceer de matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3+h \\ 0 & 1 & 1 & 2-h \\ 2 & 0 & h & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(III)-(I)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3+h \\ 0 & 1 & 1 & 2-h \\ 0 & 0 & h-1 & 1-h \end{bmatrix}.$$

Als $h = 1$, dan is de rang gelijk aan 2. Als $h \neq 1$, dan is de rang 3.

- c) Wat is de dimensie van de verzameling van oplossingen van $A\vec{x} = \vec{0}$? (Het antwoord hangt wederom af van h .)
Uitwerking: De dimensie van de kern is het aantal kolommen minus de rang van A . De dimensie is dus 2 als $h = 1$ en 1 als $h \neq 1$.

d) Geef een basis voor $\ker A$ als $h = -1$ en als $h = 1$.

Uitwerking: Reduceer de matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(III)-(I)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2 \times (III)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(I)-(III), (II)-(III)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

en vervolgens de eerste rij delen door 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dus een basis voor de kern als $h = -1$ is $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Als $h = 1$, dan weten we uit één van de

vorige deelopgaven dat de gereduceerde matrix gegeven is door:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dus een basis voor de kern als $h = 1$ is $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 2 [24 punten]:

Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geef de normaalvergelijking van het vlak V opgespannen door \vec{u} en \vec{v} .

Uitwerking: $V : \vec{n} \cdot \vec{x} = 0$, waar $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

b) Onder welke hoek snijdt \vec{w} het vlak V ?

Uitwerking: De hoek waaronder \vec{w} en \vec{n} elkaar snijden:

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{\|\vec{w}\| \|\vec{n}\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Dus $\theta = \frac{\pi}{6}$. Daaruit volgt dat de hoek tussen \vec{w} en V is $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

c) Geef de projectie van \vec{w} op V , $\text{proj}_V \vec{w}$.

Uitwerking: De projectie van \vec{w} op \vec{n} :

$$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{2} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dan:

$$\text{proj}_V \vec{w} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

d) Wat is de oppervlakte van de driehoek met zijden \vec{u} en \vec{w} ?

Uitwerking: De hoek tussen \vec{u} en \vec{w} is een rechte hoek, want $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Daarom:

$$\text{Oppervlakte driehoek} = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Opgave 3 [18 punten]:

Gegeven zijn drie lineair onafhankelijke vectoren \vec{v}_1 , \vec{v}_2 en \vec{v}_3 en de lineaire transformatie T . Er is bekend dat:

$$T(\vec{v}_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$$

a) Geef de matrix $B = [T]_{\mathfrak{B}}$, waar $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Uitwerking:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Wat is de meetkundige interpretatie van deze transformatie?

Uitwerking: Een draaiing met hoek $\frac{\pi}{4}$ in het vlak opgespannen door \vec{v}_1 en \vec{v}_2 , langs de vector \vec{v}_3 gekeken met de klok mee.

Stel dat

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Geef de matrix A van de transformatie T in de standaardbasis.

Uitwerking:

$$A = SBS^{-1}, \quad \text{waar } S = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$$

Invullen geeft:

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & -10\sqrt{2} \\ 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & -6 + 2\sqrt{2} \\ 1 + 3\frac{1}{2}\sqrt{2} & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Opgave 4 [12 punten]:

Gegeven is dat $A = \begin{bmatrix} -11 & -18 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ gelijksoortig zijn.

a) Vind λ_1 en λ_2 .

Uitwerking: Er is een matrix $S = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]$ zodanig dat $AS = SB$. Gebruikmakend van de diagonaliteit van B , zien we dat $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ voor een $\vec{v}_i \neq \vec{0}$. Dit betekent dat het stelsel $(A - \lambda_i I_2)\vec{v}_i = \vec{0}$ oneindig veel oplossingen heeft en dus is $A - \lambda_i I_2$ niet inverteerbaar. We lossen op de vergelijking $\det(A - \lambda I_2) = 0$:

$$(-11 - \lambda)(10 - \lambda) + 18 \times 6 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1 \text{ en } \lambda_2 = -2.$$

b) Stel dat de matrix van de lineaire transformatie T in de standaardbasis gegeven is door A . Welke basis moeten we nemen om B de matrix van T te laten zijn?

Uitwerking: Dit zijn de vectoren \vec{v}_1 en \vec{v}_2 uit de vorige deelopgave, bv. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5 [12 punten]:

Zijn de volgende beweringen waar of niet? Licht antwoorden bondig toe.

a) Als $A = [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]$ en $\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan geldt $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Uitwerking: Waar. Uit de gereduceerde trapvorm concluderen wij dat:

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \implies -2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \implies \vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

b) Als A en B gelijksoortige matrices zijn en A is inverteerbaar, dan is B ook inverteerbaar.

Uitwerking: Waar. Aangezien A en B gelijksoortig zijn, bestaat er een inverteerbare matrix S zodanig dat $B = S^{-1}AS$. De inverse van het rechterlid bestaat en is gegeven door $C = S^{-1}A^{-1}S$. Merk op dat $BC = BS^{-1}A^{-1}S = S^{-1}ASS^{-1}A^{-1}S = I_n$ en $CB = I_n$. Daaruit volgt dat C de inverse is van B en B is dus inverteerbaar.