



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Lineaire Algebra, tentamen

vrijdag 14 januari 2011, 9–12 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag wordt komend blok bekendgemaakt. Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum bij de balie van het secretariaat. Het maximaal aantal te behalen punten wordt hieronder in de tabel per onderdeel aangegeven.

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	5d
2	4	4	5	5	3	4	3	1	3	6	1	3	3	3

Dit aantal wordt toegekend indien er sprake is van een **gemotiveerd** en juist antwoord.

Merk op dat je alle stellingen die in de hoorcolleges of in het Bretscher boek waren bewezen mag gebruiken. Je hoeft deze stellingen niet te bewijzen, maar je moet erg duidelijk laten zien wat de stelling zegt en waarom je die kunt gebruiken.

In totaal zijn er 50 punten te verdienen (10 punten voor elke opgave) en het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5} \cdot \text{score}$.

Opgave 1

Gegeven is het volgende systeem van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden, x_1, x_2 en x_3 , en één parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = tx_1 + 1 \\ x_1 + x_3 = tx_2 + 1 \\ x_1 + x_2 = tx_3 - 2 \end{cases} \quad (1)$$

(a) Schrijf dit systeem in de matrix vorm $A\vec{x} = \vec{b}$ op met

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(b) Voor welke waarden van t heeft het systeem (1)

- geen oplossingen?
- precies 1 oplossing?
- oneindig veel oplossingen?

(c) Bepaal voor ieder van de gevallen in onderdeel (b) de volledige oplossing van het systeem (1).

ZIE OMMEZIJDE!!!

Opgave 2

Laat de vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeven zijn door

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ b^2 - a^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \\ c^2 - a^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ d \\ d^2 - a^2 \end{bmatrix},$$

waarin de constanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- (a) Bepaal alle waarden van a, b, c en d wavoor de vector \vec{v}_1 kan worden geschreven als een lineaire combinatie van de vectoren \vec{v}_2 en \vec{v}_3 , d.w.z.,

$$\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2 + \beta \vec{v}_3.$$

Schrijf duidelijk de bijbehorende coëfficiënten α en β van deze lineaire combinatie op.

- (b) Neem $a = 0, b = 1, c = 2$ en $d = 3$. Beschouw de deelruimte $V = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$.

Vind een matrix A zodanig dat $V = \text{Ker } A$. (Met andere woorden, beschrijf de deelruimte V als de kern van een matrix A .)

Wat is de dimensie van V ?

Opgave 3

Gegeven is de matrix

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -a & 0 \end{bmatrix}$$

waarin de constante $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Bepaal voor elke waarde van a respectievelijk

- $\text{rang}(C)$, d.w.z., rang van C ;
- $\dim(\text{Im } C)$, d.w.z., de dimensie van het beeld van C ;
- $\dim(\text{Ker } C)$, d.w.z., de dimensie van de nulruimte van C .

Leg je redenering uit.

- (b) Bepaal de inverse van C voor die waarden van a waarvoor de inverse gedefinieerd is. (Het antwoord, de matrix C^{-1} , hangt af van de parameter a .) Geef duidelijk aan wanneer de inverse niet bestaat.
- (c) Neem $a = 1$. Bepaal het beeld en de nulruimte van C , de verzamelingen $\text{Im } C$ en $\text{Ker } C$.

ZIE OMMEZIJDE!!!

Opgave 4

Laat vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeven zijn door

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Laat zien dat de vector \vec{v}_3 orthogonaal is tot \vec{v}_1 en tot \vec{v}_2 .
- Leg uit waarom de vectoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 en \vec{v}_3 een basis in \mathbb{R}^3 vormen.
- Beschouw de orthogonale projectie op het vlak $V = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$ in \mathbb{R}^3 . Vind de standaardmatrix van deze transformatie (d.w.z., ten opzichte van de standaardbasis $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$).

Opgave 5

Laat de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven zijn door $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, waarbij de matrix A gegeven wordt door

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Bepaal $T(\vec{e}_1)$ en $T(\vec{e}_2)$ voor de vectoren \vec{e}_1 en \vec{e}_2 die de standaard basis van \mathbb{R}^2 vormen. Maak gebruik van een plaatje in \mathbb{R}^2 en laat duidelijk de vectoren \vec{e}_1 en \vec{e}_2 en de vectoren $T(\vec{e}_1)$ en $T(\vec{e}_2)$ zien.
- Vind twee standaard (schaling/rotatie/spiegeling/orthogonalie projectie) transformaties $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zodanig dat
$$T(\vec{e}_1) = T_1(T_2(\vec{e}_1)) \quad \text{en} \quad T(\vec{e}_2) = T_1(T_2(\vec{e}_2)) \quad (2)$$
met behulp van het plaatje van de vorige opgave.
Schrijf duidelijk elke transformatie op (bijvoorbeeld, “ T_1 is de schaling met vermenigvuldigingsfactor 2”, “ T_2 is de rotatie over hoek $\pi/2$ ”).
Illustreer je antwoord met behulp van het nieuwe plaatje.
- Laat zien dat T de samengestelde functie van T_1 en T_2 is. Geef dat aan op de volgende twee manieren.
 - Bewijs dat (2) impliceert dat voor elke $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt: $T(\vec{x}) = T_1(T_2(\vec{x}))$.
 - Bepaal de matrices van de twee transformaties T_1 en T_2 die je bij onderdeel (b) hebt gevonden. Laat vervolgens zien (controleer) dat A het product van deze twee matrices is.
- Bepaal A^{2010} en A^{2011} .