FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Lineaire Algebra, tentamen — Uitwerkingen — vrijdag 14 januari 2011, 9–12 uur

Gebruik van een formuleblad of rekenmachine is niet toegestaan. De uitslag wordt komend blok bekendgemaakt. Inzage van het werk is mogelijk vanaf de uitslagdatum bij de balie van het secretariaat. Het maximaal aantal te behalen punten wordt hieronder in de tabel per onderdeel aangegeven.

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	5d
2	4	4	5	5	3	4	3	1	3	6	1	3	3	3

Dit aantal wordt toegekend indien er sprake is van een **gemotiveerd** en juist antwoord.

Merk op dat je alle stellingen die in de hoorcolleges of in het Bretscher boek waren bewezen mag gebruiken. Je hoeft deze stellingen niet te bewijzen, maar je moet erg duidelijk laten zien wat de stelling zegt en waarom je die kunt gebruiken.

In totaal zijn er 50 punten te verdienen (10 punten voor elke opgave) en het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5} \cdot$ score.

Opgave 1

Gegeven is het volgende systeem van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden, x_1, x_2 en x_3, en één parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 & = & tx_1 + 1 \\ x_1 + x_3 & = & tx_2 + 1 \\ x_1 + x_2 & = & tx_3 - 2 \end{array} \right. . \tag{1}$$

(a) Schrijf dit systeem in de matrix vorm $A\vec{x} = \vec{b}$ op met

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

(b) Voor welke waarden van t heeft het systeem (1)

- geen oplossingen?
- precies 1 oplossing?
- oneindig veel oplossingen?

(c) Bepaal voor ieder van de gevallen in onderdeel (b) de volledige oplossing van het systeem (1).

Uitwerking Opgave 1

(a)

$$A = \begin{bmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) We bepalen de trapvorm van de uitgebreide matrix $\left[A \,|\, \vec{b}\right]$:

$$\left[A \,|\, \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -t & -2 \end{array}\right] \sim /r_1 \leftrightarrow r_3/$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -t & -2 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ -t & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \Bigg/ \begin{array}{rl} r_2 := & r_2 - r_1, \\ r_3 := & r_3 + tr_1 \end{array} \Bigg/$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -t & -2 \\ 0 & -1-t & t+1 & 3 \\ 0 & 1+t & 1-t^2 & 1-2t \end{array}\right].$$

We moeten hier twee gevallen beschouwen. Voor $t = -1$ vinden we dat

$$\left[A \,|\, \vec{b}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

en het systeem (1) heeft geen oplossingen.

Voor $t \neq -1$ delen we de tweede rij door $-1-t$, de derde rij door $1+t$ (merk op dat $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$) en krijgen

$$\left[A \,|\, \vec{b}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -t & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{1+t} \\ 0 & 1 & 1-t & \frac{1-2t}{1+t} \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3 - r_2/ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -t & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{1+t} \\ 0 & 0 & 2-t & \frac{4-2t}{1+t} \end{array}\right].$$

Als $t = 2$ bevaat de laatste rij van de trapvorm van A alleen nullen. In dit geval heeft het systeem (1) oneindig veel oplossingen, omdat de laatste rij van de trapvorm van $\left[A \,|\, \vec{b}\right]$ dan ook een nul-rij is.

Als $t \neq 2$ en $t \neq -1$ heeft de trapvorm van A geen nul-rijen. Het systeem heeft dan precies 1 oplossing.

(c)

- Voor $t = -1$ heeft het systeem geen oplossingen.
- Voor $t \notin \{-1, 2\}$ heeft het systeem precies 1 oplossing die we door de laatste stappen van de Gauss-Jordan eliminatie vinden:

$$\left[A\,|\,\vec{b}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -t & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{1+t} \\ 0 & 0 & 2-t & \frac{4-2t}{1+t} \end{array}\right] \sim \Big/ \begin{array}{ll} r_3 := & r_3/(2-t), \\ r_1 := & r_1 - r_2 \end{array} \Big/$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-t & \frac{3}{1+t} - 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{1+t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+t} \end{array}\right] \sim \Big/ \begin{array}{ll} r_2 := & r_2 + r_3, \\ r_1 := & r_1 - (1-t)r_3 \end{array} \Big/$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{1+t} - 2 - \frac{2(1-t)}{1+t} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{1+t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+t} \end{array}\right]$$

Conclusie: de oplossing is

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+t} \\ -\frac{1}{1+t} \\ \frac{2}{1+t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{1+t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1+t}\vec{b}$$

- Voor $t = 2$ heeft het systeem onendig veel oplossingen.

$$\left[A\,|\,\vec{b}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim /r_1 := r_1 - r_2/ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Alle oplossingen worden gegeven door

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1+s \\ -1+s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

waarin $s \in \mathbb{R}$ de vrij variabele is.

Opgave 2

Laat de vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeven zijn door

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ b^2 - a^2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \\ c^2 - a^2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ d \\ d^2 - a^2 \end{bmatrix},$$

waarin de constanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal alle waarden van a, b, c en d waavoor de vector $\vec{v}_1$ kan worden geschreven als een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$, d.w.z.,

$$\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3.$$

Schrijf duidelijk de bijbehorende coëfficienten α en β van deze lineaire combinatie op.

(b) Neem $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ en $d = 3$. Beschouw de deelruimte $V = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Vind een matrix A zodanig dat $V = \operatorname{Ker} A$. (Met andere woorden, beschrijf de deelruimte V als de kern van een matrix A.)

Wat is de dimensie van V?

Uitwerking Opgave 2

(a) De tweede componenten van $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ zijn nullen. Daarom heeft elke lineaire combinatie van die vectoren ook 0 als de tweede component. Als $\vec{v}_1$ als een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ kan worden geschreven, moet $a = 0$ en vectoren zijn

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ b^2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \\ c^2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}.$$

We zoeken de waarden van de constanten b, c, d waarvoor de vergelijking $\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3$ een oplossing heeft. Deze vergelijking kunnen we in de matrix vorm herschrijven met de uitgebreide matrix $[\vec{v}_2 \; \vec{v}_3 \,|\, \vec{v}_1]$, d.w.z.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & b \\ c^2 & d^2 & b^2 \end{array}\right] \sim /r_2 \leftrightarrow r_4/ \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & d^2 & b^2 \\ c & d & b \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \Big/ \begin{array}{rl} r_2 := & r_2 - c^2 r_1, \\ r_3 := & r_3 - c\, r_1 \end{array} \Big/ \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & d^2 - c^2 & b^2 - c^2 \\ 0 & d - c & b - c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim /r_2 \leftrightarrow r_3/ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & d - c & b - c \\ 0 & d^2 - c^2 & b^2 - c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

We moeten twee gevalen beschouwen: $d = c$ en $d \neq c$. In het eerste geval, waarin $d = c$, krijgen we

$$[\vec{v}_2\ \vec{v}_3\,|\,\vec{v}_1] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & b^2-c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dit systeem heeft een oplossing dan en slechts dan als $b = c$. Conclusie: voor $b = c = d$ (en $a = 0$) kunnen we vector $\vec{v}_1$ als lineaire combinatie van $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ schrijven.

In het tweede geval, waarin $d \neq c$, heeft de uitgebreide matrix de trapvorm

$$[\vec{v}_2\ \vec{v}_3\,|\,\vec{v}_1] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & d-c & b-c \\ 0 & d^2-c^2 & b^2-c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \Big/ \begin{array}{rl} r_2 := & r_2/(d-c), \\ r_3 := & r_3/(d-c), \end{array} \Big/ \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-c}{d-c} \\ 0 & d+c & \frac{b^2-c^2}{d-c} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3 - (d+c)r_2/ \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-c}{d-c} \\ 0 & 0 & \frac{b^2-c^2-(d+c)(b-c)}{d-c} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het systeem heeft een oplossing dan en slechts dan als

$$\frac{b^2-c^2-(d+c)(b-c)}{d-c} = 0 \ \Leftrightarrow\ (b-c)(b-d) = 0 \ \Leftrightarrow\ b = c \quad \text{of} \quad b = d.$$

Conclusie: voor $b = c$ (en $a = 0$) kunnen we vector $\vec{v}_1$ als lineaire combinatie van $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ schrijven. En ook voor $b = d$ (en $a = 0$) kunnen we vector $\vec{v}_1$ als lineaire combinatie van $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ schrijven.

We hebben nu drie gevallen gevonden, waarin de vector $\vec{v}_1$ kan worden geschreven als een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$:

- $a = 0$, $b = c = d$. In dit geval zijn alle drie vectoren gelijk. Daarom $\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3$ met willekeurige α en β zodanig dat $\alpha + \beta = 1$.
- $a = 0$, $b = c$. In dit geval $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ en de coëfficienten van de bijbehorende lineaire combinatie zijn $\alpha = 1$ en $\beta = 0$.
- $a = 0$, $b = d$. In dit geval $\vec{v}_1 = \vec{v}_3$ en de coëfficienten van de bijbehorende lineaire combinatie zijn $\alpha = 0$ en $\beta = 1$.

(b) We beschouwen

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{en introduceren matrix } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

zodat $\operatorname{Im} B = V$. Vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^4$ behoort tot V wanneer het systeem $B\vec{x} = \vec{y}$ oplosbaar is. We vinden de trapvorm van dit systeem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 1 & 2 & 3 & y_3 \\ 1 & 4 & 9 & y_4 \end{array}\right] \sim /r_2 \leftrightarrow r_4/ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & 3 & y_3 \\ 1 & 4 & 9 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 \end{array}\right] \sim \Big/ \begin{array}{ll} r_2 := & r_2 - r_1, \\ r_3 := & r_3 - r_1, \end{array} \Big/ \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & y_3 - y_1 \\ 0 & 3 & 8 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3 - 3r_2/ \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & 2 & y_4 - y_1 - 3(y_3 - y_1) \\ 0 & 0 & 0 & y_2 \end{array}\right].$$

Het systeem heeft oplossing dan en slechts dan als $y_2 = 0$. Daarom

$$\operatorname{Im} B = V = \{y \in \mathbb{R}^4 : y_2 = 0\}.$$

Deze verzameling kunnen we ook als $\operatorname{Ker} A$ opschrijven met matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ zijn lineair onafhankelijk, omdat matrix B rang 3 heeft. De dimensie van V is 3.

Opgave 3

Gegeven is de matrix

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -a & 0 \end{bmatrix}$$

waarin de constante $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal voor elke waarde van a respectievelijk

- $\operatorname{rang}(C)$, d.w.z., rang van C;
- $\dim(\operatorname{Im} C)$, d.w.z., de dimensie van het beeld van C;
- $\dim(\operatorname{Ker} C)$, d.w.z., de dimensie van de nulruimte van C.

Leg je redenering uit.

(b) Bepaal de inverse van C voor die waarden van a waarvoor de inverse gedefinieerd is. (Het antwoord, de matrix C^{-1}, hangt af van de parameter a.) Geef duidelijk aan wanneer de inverse niet bestaat.

(c) Neem $a = 1$. Bepaal het beeld en de nulruimte van C, de verzamelingen $\operatorname{Im} C$ en $\operatorname{Ker} C$.

Uitwerking Opgave 3

(a) We bepalen de trapvorm van de matrix C:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -a & 0 \end{bmatrix} \sim /r_1 \leftrightarrow r_2/ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -a & 0 \end{bmatrix} \sim /r_3 := r_3 + 2r_1/$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -a & 2a \end{bmatrix} \sim /r_3 := r_3 + ar_2/ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4a \end{bmatrix}.$$

Bij definitie van de rang, heeft de matrix C de volledige rang (gelijk aan 3) voor elke waarde $a \neq 0$. Als $a = 0$ is de rang van C gelijk aan 2.

Voor $a \neq 0$ betekent het (we gebruiken de stelling over de eigenschappen van de inverteerbare matrices) dat:

$$\operatorname{Im} C = \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im} C) = 3\,, \qquad \text{en dat} \qquad \operatorname{Ker} C = \left\{\vec{0}\right\} \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Ker} C) = 0\,.$$

Voor $a = 0$ wordt de trapvorm van C gegeven door

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er zijn precies twee lineair onafhankelijke kolommen van deze matrix (bijv., de eerste twee). De kolommen van C spannen het beeld van C op. Daarom geldt $\dim(\operatorname{Im} C) = 2$. Uit de stelling over de rang en de dimensie van de nul-ruimte (*Rank-Nullity Theorem*) concluderen we dat $\dim(\operatorname{Ker} C) = 3 - \dim(\operatorname{Im} C) = 1$.

(b) In het vorige onderdeel hebben we gevonden dat voor $a = 0$ de matrix C niet de volledige rang heeft. In dit geval bestaat de inverse matrix niet.

De matrix C is inverteerbaar voor elke $a \neq 0$, omdat de rang van C in dit geval 3 is. Voor $a \neq 0$ geldt het volgende:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim /r_1 \leftrightarrow r_2 / \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3 + 2r_1/$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 2a & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3 + ar_2/ \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a & a & 2 & 1 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3/(4a)/$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{4a} \end{array}\right] \sim \Bigg/ \begin{array}{rl} r_1 := & r_1 - ar_3, \\ r_2 := & r_2 - 2r_3, \end{array} \Bigg/ \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{4a} \end{array}\right].$$

We vinden dat

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix}.$$

(c) Het resultaat van het onderdeel (b) impliceert dat voor $a = 1$ de matrix C inverteerbaar is. Daarom geldt $\operatorname{Im} C = \mathbb{R}^3$ en $\operatorname{Ker} C = \left\{\vec{0}\right\}$.

Opgave 4

Laat vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeven zijn door

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de vector $\vec{v}_3$ orthogonaal is tot $\vec{v}_1$ en tot $\vec{v}_2$.

(b) Leg uit waarom de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ een basis in $\mathbb{R}^3$ vormen.

(c) Beschouw de orthogonale projectie op het vlak $V = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ in $\mathbb{R}^3$. Vind de standaardmatrix van deze transformatie (d.w.z., ten opzichte van de standaarde basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$).

Uitwerking Opgave 4

(a) Met een directe berekening controleren we de definitie van orthogonaliteit:

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = -5 \cdot 3 + -4 \cdot -2 + 1 \cdot 7 = 0,$$

en

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = -5 \cdot 1 + -4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 0.$$

(b) Elk drietal lineaire onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^3$ vormen een basis. We moeten laten zien dat $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ lineair onafhankelijke zijn.

Vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zijn onafhankelijk (het is duidelijk dat $\vec{v}_1$ niet een veelvoud van $\vec{v}_2$ is), en vector $\vec{v}_3$ behoort niet tot het vlak V dat $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ vormen (omdat $\vec{v}_3$ loodrecht op dit vlak staat). Daarom zijn $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ lineair onafhankelijk.

(c) Ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ wordt de orthogonale projectie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ op het vlak V gegeven door de matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Herinner je dat de kolommen van B te schrijven zijn als de $\mathcal{B}$-coordinaten van de vectoren $P(\vec{v}_1)$, $P(\vec{v}_2)$ en $P(\vec{v}_3)$:

$$\begin{aligned} P(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 \quad &= 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3; \\ P(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \quad &= 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3; \\ P(\vec{v}_3) = \vec{0} \quad &= 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3. \end{aligned}$$

Daarna is de matrix van de projectie T in de standaarde basis gegeven als $A = SBS^{-1}$, waarin $S = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3]$. Ten eerste vinden we S^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim /r_1 \leftrightarrow r_2 / \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim /r_1 := r_1/(-2)/ \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \Bigg/ \begin{array}{ll} r_2 := & r_2 - 3r_1, \\ r_3 := & r_3 - 7r_1, \end{array} \Bigg/ \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 0 & \frac{7}{2} & 1 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3 - 5r_2/ \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim /r_3 := r_3/42/ \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{42} & -\frac{2}{21} & \frac{1}{42} \end{array}\right] \sim \Bigg/ \begin{array}{ll} r_1 := & r_1 - 2r_3, \\ r_2 := & r_2 + 11r_3, \end{array} \Bigg/ \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{21} & -\frac{13}{42} & -\frac{1}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{42} & \frac{19}{42} & \frac{11}{42} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{42} & -\frac{2}{21} & \frac{1}{42} \end{array}\right].$$

Daarom

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{42} & -\frac{13}{42} & -\frac{2}{42} \\ -\frac{13}{42} & \frac{19}{42} & \frac{11}{42} \\ -\frac{5}{42} & -\frac{4}{42} & \frac{1}{42} \end{bmatrix}.$$

Ten slotte vinden we:

$$A = SBS^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{42} & -\frac{13}{42} & -\frac{2}{42} \\ -\frac{13}{42} & \frac{19}{42} & \frac{11}{42} \\ -\frac{5}{42} & -\frac{4}{42} & \frac{1}{42} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{42} & -\frac{13}{42} & -\frac{2}{42} \\ -\frac{13}{42} & \frac{19}{42} & \frac{11}{42} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{42} & -\frac{20}{42} & \frac{5}{42} \\ -\frac{20}{42} & \frac{26}{42} & \frac{4}{42} \\ \frac{5}{42} & \frac{4}{42} & \frac{41}{42} \end{bmatrix}.$$

Opgave 5

Laat de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven zijn door $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, waarbij de matrix A gegeven wordt door

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Bepaal $T(\vec{e}_1)$ en $T(\vec{e}_2)$ voor de vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ die de standaard basis van $\mathbb{R}^2$ vormen.

Maak gebruik van een plaatje in $\mathbb{R}^2$ en laat duidelijk de vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ en de vectoren $T(\vec{e}_1)$ en $T(\vec{e}_2)$ zien.

(b) Vind twee standaard (schaling/rotatie/spiegeling/orthogonalie projectie) transformaties $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$T(\vec{e}_1) = T_1(T_2(\vec{e}_1)) \quad \text{en} \quad T(\vec{e}_2) = T_1(T_2(\vec{e}_2)) \tag{2}$$

met behulp van het plaatje van de vorige opgave.

Schrijf duidelijk elke transformatie op (bijvoorbeeld, "T_1 is de schaling met vermenigvuldigingsfactor 2", "T_2 is de rotatie over hoek $\pi/2$").

Illustreer je antwoord met behulp van het nieuwe plaatje.

(c) Laat zien dat T de samengestelde functie van T_1 en T_2 is. Geef dat aan op de volgende twee manieren.

- Bewijs dat (2) impliceert dat voor elke $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt: $T(\vec{x}) = T_1(T_2(\vec{x}))$.
- Bepaal de matrices van de twee transformaties T_1 en T_2 die je bij onderdeel (b) heb gevonden. Laat vervolgend zien (controleer) dat A het product van deze twee matrices is.

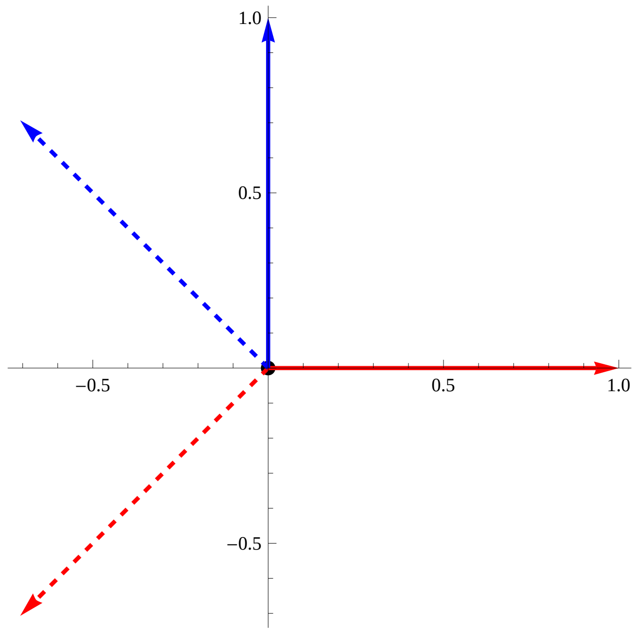
(d) Bepaal A^{2010} en A^{2011}.

Uitwerking Opgave 5

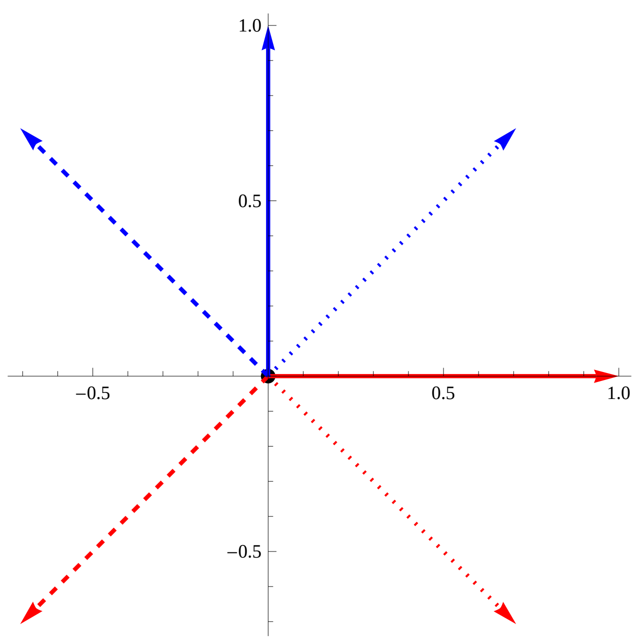
(a) De kolommen van matrix A geven de beelden van de vectoren van de standaard basis:

$$T(\vec{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} , \qquad T(\vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Zie Figuur 1 voor het plaatje.



Figuur 1: *Twee basis vectoren $\vec{e}_1$ (rode) en $\vec{e}_2$ (blauwe) en de beelden van deze vectoren onder A: $T(\vec{e}_1)$ (gestreepte rode) en $T(\vec{e}_2)$ (gestreepte blauwe).*



Figuur 2: *Transformatie T als de samengestelde functie van de rotatie over een hoek $-\pi/4$ (tot de gestippelde pijltjes) en de spiegeling in de y-as (tot de gestreepte pijltjes).*

(b) Stel, bijvoorbeeld, dat T_2 de rotatie over een hoek $-\pi/4$ is en T_1 de spiegeling in y-as (verticale as) is. Het bijbehorende plaatje in Figuur 2 laat ons zien dat toepassing van T_2 en dan van T_1 voor beide vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ equivalent is aan de toepassing van T.

Andere antwoorden zijn ook mogelijk. Bijvoorbeeld, we kunnen de vectoren eerst ten opzicht van de verticale as spiegelen (dat zou T_2 zijn), en daarna de rotatie over de hoek $\pi/4$ toepassen (als T_1). Of, roteer de vectoren over een hoek $\pi/4$, en spiegel dan in de lijn $y = -x$.

(c) Het eerste bewijs maakt gebruik van de algemene eigenschappen van de lineaire transformatie dat zo'n transformatie gesloten is met betrekking tot optellen en vermenigvuldiging met een scalair.

- We kunnen altijd een vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ als volgt representeren:

  $$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

  met bijbehorende coördinaten x_1 en x_2. Omdat de transformatie T lineair is, geldt

  $$T(\vec{x}) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2). \tag{3}$$

  Dezelfde eigenschappen voor T_2 impliceren dat:

  $$T_2(\vec{x}) = x_1T_2(\vec{e}_1) + x_2T_2(\vec{e}_2),$$

  en daarna voor T_1 dat

  $$\begin{aligned} T_1(T_2(\vec{x})) &= T_1\big(x_1T_2(\vec{e}_1) + x_2T_2(\vec{e}_2)\big) = \\ &= x_1T_1(T_2(\vec{e}_1)) + x_2T_1(T_2(\vec{e}_2)) \,. \end{aligned}$$

  Gebruik (2) om te schrijven dat $T_1(T_2(\vec{e}_1)) = T(\vec{e}_1)$ en $T_1(T_2(\vec{e}_2)) = T(\vec{e}_2)$. Dat levert:

  $$T_1(T_2(\vec{x})) = x_1T_1(T_2(\vec{e}_1)) + x_2T_1(T_2(\vec{e}_2)) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2).$$

  De laatste uitdrukking is gelijk aan $T(\vec{x})$ die we hebben gevonden in (3). We concluderen dat $T_1(T_2(\vec{x})) = T(\vec{x})$.

Het tweede bewijs hangt van de gevonden T_1 en T_2 in het onderdeel (b) af. Hier is een bewijs voor het geval dat we in Figuur 2 illustreerden.

- We nemen als T_2 de rotatie over de hoek $-\pi/4$. De standaard matrix van deze transformatie wordt gegeven door

  $$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

  T_1 is de spiegeling in de y-as. Omdat $T_1(\vec{e}_1)) = -\vec{e}_1$ en $T_1(\vec{e}_2)) = \vec{e}_2$ is de matrix van deze transformatie

  $$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We berekenen het product van deze twee matrices en vergelijken het resultaat met matrix A:

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Het resultaat is precies de matrix A.

(d) We berekenen

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2,$$

de indentiteit matrix. Daarom

$$A^{2010} = (A^2)^{1005} = \mathbb{I}_2^{1005} = \mathbb{I}_2$$

en

$$A^{2011} = A^{2010} \cdot A = \mathbb{I}_2 \cdot A = A.$$

EINDE DEELTENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA
