

# Voortgangstoets Lineaire Algebra III - AEO

27-02-2009, 11.00-12.00 zaal B1.B

Succes!

**Opg 1** Beschouw deelruimte  $V \subset \mathbb{R}^3$  met opspansel  $V = \text{span} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ , waarbij

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a Construeer een orthonormale basis van  $V = \text{span} \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  m.b.v. de Gram-Schmidt methode.
- b Bepaal de  $QR$  factorisatie van de matrix  $A = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2)$ .
- c Bepaal de matrix  $M$  van de orthogonale projectie op  $V$ .
- d Bepaal de matrix van de spiegeling  $S$  t.o.v.  $V$ .

Uitwerking

$$\mathbf{a} \quad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{u}_1}{\|\vec{v}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{u}_1\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\implies Q = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

b De  $QR$  factorisatie van de matrix  $A \implies Q^\top A = Q^\top QR = R \implies$

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

c De matrix van de orthogonale projectie op deelruimte  $V$  :

$$\text{proj}_V \vec{x} = QQ^\top \vec{x} = M\vec{x}.$$

$$\implies M = QQ^\top = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

d De matrix van de spiegeling  $S$  t.o.v.  $V$  is  $S = 2M - I_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$

**Opg 2** Beschouw de vectoren  $\vec{u}$  en  $\vec{v}$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Bewijs met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz dat

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|.$$

Bewijs:  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Cauchy-Swartz:  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \implies -|\vec{u} \cdot \vec{v}| \geq -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \implies$   
 $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \geq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)^2.$