Wiskunde III AEO - maart 2004.

Lineaire Algebra

Opgave 1 A_h is de 3×3 matrix gegeven door

$$A_h = \begin{bmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & h \end{bmatrix}.$$

- Bereken $\det(A_h)$. Als je de Gauss eliminatie gebruikt, zet eerst de onderste rij bovenaan. Voor welke waarden van h in $\mathbb{R}$ is A_h inverteerbaar?
- Bepaal $\operatorname{im}(A_h)$ en $\ker(A_h)$ in de gevallen waar geen inverse bestaat. Zorg ervoor dat de basisvectoren zoveel mogelijk 0'en en 1'en bevatten.

Gauss $\det A_h = \det \begin{bmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & h \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & h+1 & h^2-1 \end{bmatrix}$

$$= (h+1)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 \end{bmatrix} = (h+1)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 \end{bmatrix}$$

$$= (h+1)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-2 \end{bmatrix} = (h+1)^2 (h-2).$$

A_h is inverteerbaar als $\det A_h \neq 0$. Dus, in dit geval als $h \neq -1, 2$.

- $A_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{im}(A_{-1}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\ker(A_{-1}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{im}(A_2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(A_2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Opgave 2 Het parallellogram P wordt opgespannen door twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ in $\mathbb{R}^n$.

- Maak een schets van P in $\mathbb{R}^2$ en bepaal de diagonalen $\vec{u}$ en $\vec{v}$ van P in termen van $\vec{x}$ en $\vec{y}$. Bewijs dat $\vec{u} \perp \vec{v}$ d.e.s.d.a. $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$.
- Bepaal de oppervlakte O van P en schrijf O in termen van $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\|, \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Oplossing We hebben: $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$, of andersom.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$.
Hieruit volgt: $[\vec{u} \perp \vec{v}] \iff [\vec{u} \cdot \vec{v} = 0] \iff [\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|]$.

- Berekening van de oppervlakte m.b.v. de $n \times 2$ matrix $A = [\vec{x}\ \vec{y}]$.
  $A^T A = \begin{bmatrix} \vec{x} \cdot \vec{x} & \vec{x} \cdot \vec{y} \\ \vec{y} \cdot \vec{x} & \vec{y} \cdot \vec{y} \end{bmatrix}$ met $\det\left(A^T A\right) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$.
  Derhalve geldt: $O = \sqrt{\det\left(A^T A\right)} = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2}$.
- Berekening van de oppervlakte m.b.v. de hoek θ tussen $\vec{x}$ en $\vec{y}$.
  $O = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin\theta = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} =$
  $$= \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sqrt{1 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 / \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2} = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2}.$$

Opgave 3 Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Bepaal de orthogonale projectie van $\vec{b}$ op $V = \operatorname{im}(A)$. Laat zien hoe je controleert dat het antwoord correct is. Bereken de afstand van $\vec{b}$ tot V.

Oplossing

- A heeft onafhankelijke kolommen. $A^T A$ is inverteerbaar en $P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ is de matrix van de orthogonale projectie op $V = \operatorname{im}(A)$.
  $$proj_V \vec{b} = P\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
- Een orthonormale basis van V: $v_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (G-S).
  $$proj_V \vec{b} = \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{b}\right)\vec{v}_1 + \left(\vec{v}_2 \cdot \vec{b}\right)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
- $\left(\vec{b} - proj_V \vec{b}\right)$ staat loodrecht op $\operatorname{im}(A)$, oftewel $A^T\left(\vec{b} - proj_V \vec{b}\right) = \vec{0}$.
- $d\left(\vec{b}, V\right) = \min_{x \in V} \left\|\vec{b} - \vec{x}\right\| = \left\|\vec{b} - proj_V \vec{b}\right\| = 3$.

Opgave 4 A_n is de $n \times n$ matrix met $a_{ij} = b$ als $i = j + 1$ en $a_{ij} = a$ elders.

Bereken $\det(A_5)$. Geef een, zo eenvoudig mogelijke, formule voor $\det(A_n)$.

Oplossing

- $$\det A_5 = \det \begin{bmatrix} a & a & a & a & a \\ b & a & a & a & a \\ a & b & a & a & a \\ a & a & b & a & a \\ a & a & a & b & a \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{aftrek van de eerste rij} \\ \text{van de overige rijen} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a & a & a \\ b-a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Laplace ontwikkeling} \\ \text{langs de laatste kolom} \end{pmatrix}$$

$$(-1)^6\, a \det \begin{bmatrix} b-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{bmatrix} = a\,(b-a)^4 .$$

- $\det A_n = (-1)^{n+1}\, a\,(b-a)^{n-1} = a\,(a-b)^{n-1}$.

Opgave 5 We bewijzen de stelling.

$$[A \text{ is inverteerbaar}] \iff [\det(A) \neq 0] .$$

a $\Longrightarrow$ Bewijs deze implicatie m.b.v. de productregel voor determinanten.

b $\Longleftarrow$ We maken gebruik van de geadjungeerde matrix $\operatorname{adj}(A) = B = [b_{ij}]$.

- Geef een formule voor $b_{ij},\ i, j = 1, ..., n$.
- Wat is het matrixproduct AB?
- Bewijs: $[\det(A) \neq 0] \implies [A \text{ is inverteerbaar}]$.

Oplossing

$\Longrightarrow$ $(\det A)\left(\det A^{-1}\right) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$.

$\Longleftarrow$ $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji},\ i, j = 1, ..., n$, met A_{ji} de deelmatrix van A die onstaat na de verwijdering van de $j-$de rij en van de $i-$de kolom.

- $A\operatorname{adj}(A) = (\det A)\, I$ (volgt uit de Laplace ontwikkeling).
- $[\det(A) \neq 0] \implies \left[(\det A)^{-1} A\operatorname{adj}(A) = I\right] = \left[(\det A)^{-1} \operatorname{adj}(A) = A^{-1}\right]$.