Tentamen Analyse AEO III - 03-04-2008 - 9.00 tot 11.00 uur.

Opgave 1 *Differentiëren*, (**a**) : $4+4$, (**b**) : 4

$f(x,y)$ is een twee keer differentieerbare functie van twee variabelen waarvoor gegeven is dat $f(0,0)=1$, $Df(0,0)=(1,2)$, $D^2f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$g(t)=(u(t),v(t))$ is een twee keer differentieerbare vectorfunctie waarvoor gegeven is dat $g(1)=(0,0)$, $g'(1)=(2,-1)$ en $g''(1)=(-1,2)$.

a $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is gegeven door $h(t)=f(g(t))$. Bereken $h'(1)$ en $h''(1)$.

b $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ is gegeven door $K(x,y)=g(f(x,y))=(u(f(x,y)),v(f(x,y)))$.

Bepaal $DK=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ en bereken $\det(DK(0,0))$.

Oplossing Schrijf g, g' en g'' op als kolomvectoren zo dat:

$g(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g'(1)=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $g''=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a $h'(t)=Df(g(t))\,g'(t)$ zodat $h'(1)=Df(0,0)\,g'(1)=(1\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=0$.

$h''(t)=(g'(t))^{\top}D^2f(g(t))\,g'(t)+Df(g(t))\,g''(t)$ zodat

$h''(1)=(2\quad -1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}+(1\ \ 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=15.$

b $DK(x,y)=g'(f(x,y))\,Df(x,y)$ zodat

$DK(0,0)=g'(1)\,Df(0,0)=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ \ 2)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

DK is een matrix van rang 1, zodat $\det(DK(x,y))=0$ voor alle (x,y).

Opgave 2 *Minima en maxima*, (**a**) : $4+4$, (**b**) : 4

Beschouw de functie van twee variabelen gegeven door de formule

$$f(x,y)=x^4+16xy+y^4.$$

a Vind de kritieke punten van f in $\mathbb{R}^2$ en bepaal hun aard.

b Onderzoek of f absolute extrema op $\mathbb{R}^2$ heeft.

Oplossing $\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 16y \\ 16x + 4y^3 \end{pmatrix}, \; D^2 f = \begin{pmatrix} 12x^2 & 16 \\ 16 & 12y^2 \end{pmatrix}.$

a $\left\{\begin{matrix} 4x^3 + 16y = 0 \\ 16x + 4y^3 = 0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} y = \frac{-1}{4}x^3 \\ y^3 = -4x \end{matrix}\right\} \implies \left(4x = \left(\frac{1}{4}x^3\right)^3\right) \implies \left(x^8 = 4^4 \text{ of } x = 0\right)$

$\implies P_1\left(x_1 = 2,\; y_1 = -2\right),\; P_2\left(x_2 = -2,\; y_2 = 2\right),\; P_3\left(x_3 = 0,\; y_3 = 0\right).$

$D^2 f\left(P_{1,2}\right) = \begin{pmatrix} 48 & 16 \\ 16 & 48 \end{pmatrix} = 48^2 - 16^2 > 0 \implies$ lokale minima,

$D^2 f\left(P_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} = -16^2 < 0 \implies$ een zadelpunt.

b f heeft geen lokaal maximum dus ook geen absoluut maximum op $\mathbb{R}^2$.

f als een continue functie heeft een minimum en een maximum op een gesloten een begrensd gebied als de vierkant $K = \{(x,y) \mid |x| \geq 4 \vee |y| \geq 4\}$. Aan de rand van K is f positief terwijl $f\left(P_1\right) = f\left(P_2\right) = -32$. Hieruit volgt dat P_1 en P_2 minima van f op K zijn. Buiten K is f ook positief zodat P_1 en P_2 absolute minima van f op de hele $\mathbb{R}^2$ zijn.

Opgave 3 *Coördinatentransformaties*, (**a**) : 2, (**b**) : 6, (**c**) : 4

D is het gebied omsloten door twee parabolen $y = x^2$ en $x = y^2$.

De opdracht in onderstaande vragen is telkens om de dubbele integraal

$$I = \iint_D \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\, dA$$

te herschrijven als herhaalde integraal. Dit kan je op verschillende manieren doen. Let wel, in geen van de vragen hoef je de integratie zelf uit te voeren!

a Schets D en herschrijf I als een integraal in de (x, y) coördinaten.

b Maak een schets van D in poolcoördinaten en schrijf I op als een herhaalde integraal in poolcoördinaten. Bepaal hiertoe eerst de grenzen voor de herhaalde integratie. Hiervoor moet je het gebied in twee stukken splitsen. Vergeet daarna niet ook de functie onder de integraal te transformeren!

c Maak een schets van D in de coördinaten $u = x^2/y, v = y^2/x$ en herschrijf I als een herhaalde integraal in de variabelen (u, v).

Oplossing De twee parabolen snijden elkaar in $(0, 0)$ en in $(1, 1)$.

a $$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\, dx dy.$$

b Zij $D = D_1 \cup D_2$, met $D_1 = D \cap \{x > y\}$ en $D_2 = D \cap \{x < y\}$.

In D_1 ligt de bovengrens van r op de kromme $y = x^2$, als $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$.

In D_2 ligt de bovengrens van r op de kromme $x = y^2$, als $r\cos\theta = r^2\sin^2\theta$.

In de poolcoördinaten geldt

$$(r,\theta)\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}\right) = \arctan(\cot\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

$$I = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\tan\theta/\cos\theta} r\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\, drd\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\cot\theta/\sin\theta} r\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\, drd\theta.$$

c In de (u,v) coördinaten liggen de grenzen van het integratiegebied bij $u = 1$ en $v = 1$. Daarnaast zijn beide variabelen positief. Omgekeerd geldt dat voor elk punt (u,v) met $0 \leq u \leq 1$ en $0 \leq v \leq 1$ het overeenkomstige punt $x = \sqrt[3]{u^2v}$, $y = \sqrt[3]{uv^2}$ in het gebied D ligt.

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{pmatrix}$, met $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = 3$ en $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{3}$.

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1 \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{u}{v}}\right)\, dudv.$$

Opgave 4 *Volume en oppervlakte in poolcoördinaten*, (**a**) : 6, (**b**) : 6

B is de bol met straal 2 en middelpunt in de oorsprong en V het horizontale vlak $z = 1$. Zij K het deel van B dat boven het vlak V ligt.

a Bereken het volume van K.

b Bereken de oppervlakte van de bovenkant van K.

Oplossing Het volume K ligt tussen de oppervlakken $z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$ en $z = 1$. Deze twee oppervlakken snijden elkaar langs de cirkel $S = \left\{x^2+y^2 = 3\right\}$.

a $V = \iint_s \left(\sqrt{4-(x^2+y^2)} - 1\right)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\left(\sqrt{4-r^2}-1\right)\, drd\theta =$ $2\pi\left(\frac{-1}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2} - \frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{3}$.

b $A = \iint_s \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\right) dA = \iint_s \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{4-(x^2+y^2)} + \frac{y^2}{4-(x^2+y^2)}}\right) dA =$ $\iint_s \frac{2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\, drd\theta = -4\pi\sqrt{4-r^2}\,\Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\pi$