

Wiskunde AEO IV Calculus, 26-05-2003, 9.30-11.00 uur.

Opgave 1

- (a) Zij g een differentieerbare functie van één variabele en f een functie van twee variabelen, zodanig dat $f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$ als $y \neq 0$. Bewijs dat

$$\nabla f(x, y) \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \text{ voor } (x, y) \text{ met } y \neq 0.$$

- (b) Zij Lf de lineaire benadering van een differentieerbare functie f in de buurt van (a, b) . Bepaal $\nabla f(a, b)$ en $Lf(x, y)$ voor $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Gebruik (a) om Lf te vereenvoudigen. Bepaal Lf voor $(a, b) = (3, 1)$.

Oplissing

- (a) $f(x, y) = g(h(x, y))$, met $h(x, y) = \frac{x}{y}$. De functie h is differentieerbaar als $y \neq 0$, zo dat ook de functie f differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2 \setminus (x\text{-as})$.

Methode 1. Met behulp van de kettingregel geldt nu:

$$\nabla f(x, y) = g' \left(\frac{x}{y} \right) \times \nabla h(x, y) = g' \left(\frac{x}{y} \right) \times \begin{pmatrix} 1/y \\ -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla f(x, y) \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g' \left(\frac{x}{y} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 1/y \\ -x/y^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Methode 2. $k(t) = f(tx, ty) = g\left(\frac{x}{y}\right)$ is constant als een functie van t , voor de vaste (x, y) , zo dat $k'(t) = 0$. Hieruit volgt, m.b.v. de kettingregel:

$$0 = k'(t) = D_t f(tx, ty) = \nabla f(x, y) \bullet D_t \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} = \nabla f(x, y) \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (b) $Lf(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \bullet \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$.

Voor $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ is:

$$f_x = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+(x/y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f_y = \frac{-x}{y^2} \cdot \frac{1}{1+(x/y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

$$\nabla f(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}.$$

$$Lf(x, y) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$f(3, 1) \approx 1,25, \quad f_x(3, 1) = 0,10, \quad f_y(3, 1) = -0,30.$$

$$Lf(x, y) = 1,25 + 0,10x - 0,30y.$$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x^2 - y)(1 - y)$.

- (a) Bepaal alle kritieke punten van f en hun aard.
- (b) Bepaal de absoluut maximale waarde van f op de parabool $P : x^2 - 2y = 0$, met behulp van een Lagrange multiplicator.

Oplossing

- (a) In een kritiek punt van een differentieerbare functie f geldt $\nabla f = 0$.

$$(f_x = 2x(1 - y) = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 1) \text{ en vervolgens}$$

$$(f_y = 2y - x^2 - 1 = 0 \wedge x = 0) \Rightarrow (y = \frac{1}{2}),$$

$$(f_y = 2y - x^2 - 1 = 0 \wedge y = 1) \Rightarrow (x = \pm 1).$$

De kritieke punten van f zijn: $A : (0, \frac{1}{2})$, $B : (1, 1)$, $C : (-1, 1)$.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}.$$

$A : (f_{xx}(A) = 1, D(A) = \det D^2 f = 2) \Rightarrow A$ is een lokaal minimum,

$B, C : (f_{xx} = 0, D = \det D^2 f = -4) \Rightarrow B$ en C zijn zadelpunten.

- (b) De Lagrange vergelijking voor de optimalisatie van f onder de voorwaarde $g = 0$ luidt $\nabla f = \lambda \nabla g$. In dit geval is:

$$f(x, y) = (x^2 - y)(1 - y), \text{ met } \nabla f = \begin{pmatrix} 2x(1 - y) \\ 2y - x^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$g(x, y) = x^2 - 2y, \text{ met } \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}.$$

In een maximum van f op P gelden dus de volgende vergelijkingen:

$$(1) 2x(1 - y) = 2x\lambda, \quad (2) 2y - x^2 - 1 = -2\lambda, \quad (3) x^2 - 2y = 0.$$

Aan de eerste vergelijking is voldaan als $x = 0$ of als $1 - y = \lambda$.

Invulling in vergelijkingen (2) en (3) levert de volgende punten op:

$$D : x = 0, y = 0, \lambda = \frac{1}{2}, \text{ met } f(D) = 0, \text{ en}$$

$$E, F : x = \pm 1, y = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}, \text{ met } f(E) = f(F) = \frac{1}{4}.$$

E en F zijn lokale maxima van f op P . De waarde van f gaat naar $-\infty$ als (x, y) op P naar (∞, ∞) of $(-\infty, \infty)$ gaat. E en F zijn dus ook absolute maxima van f op P .

$$\max_P f = f(E) = f(F) = \frac{1}{4}.$$

Opgave 3

$$I = \iint_D \frac{dA}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ over de driehoek } D \text{ met hoekpunten } (0, 0), (1, 0), (1, 1).$$

(a) Bereken I , m.v.b. een herhaalde integraal in de coördinaten (x, y) .

(b) Bereken I , m.v.b. een integraal in de pool-coördinaten (r, θ) .

Oplossing

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad I &= \int_0^1 \int_0^x \frac{dy dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^1 \left(\ln \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\ln \left((1 + \sqrt{2})x - \ln x \right) \right) dx = \ln \left(1 + \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} \frac{r}{r} dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \left(\ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \ln \left(1 + \sqrt{2} \right).$$

Opgave 4

De lens L is het gebied begrensd door de boloppervlakken

$$B_0 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{en} \quad B_1 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

(a) Beschrijf L in de bol-coördinaten (ρ, θ, ϕ) .

(b) Bereken het volume V van L , m.b.v. integratie in bol-coördinaten.

Oplossing I $B_0 : \rho = 1$, $B_1 : \rho = 2 \cos \phi$, zo dat op $C = B_0 \cap B_1$ is $\cos \phi = \frac{1}{2}$ en $\phi = \frac{\pi}{3}$.
Voor $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ ligt de bovengrens van ρ op B_0 , voor $\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ op B_1 .

$$L = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3} \right\} \cup \left\{ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_L 1 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \phi d\phi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^3 \phi \sin \phi d\phi \right) = \frac{2\pi}{3} \left(-(\cos \phi) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - (2 \cos^4 \phi) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

Oplossing II Voor $0 \leq \rho \leq 1$ wordt de bovengrens van ϕ bereikt op B_1 .

$$L = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \arccos \frac{\rho}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_L 1 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\arccos \frac{\rho}{2}} \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho^2 (-\cos \phi) \Big|_0^{\arccos \frac{\rho}{2}} d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$