FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde AEO III

Uitwerking voortgangstoets

27 februari 2009

1. *Laat* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *gegeven zijn als*

$$c(t) = (x(t), y(t)) = (1 - t^2, 3t - t^3).$$

We willen de kromme C *tekenen die door* c *geparametriseerd wordt.*

a *In welke punten snijdt de kromme* C *de coördinaatassen?*

Punten op de x-as voldoen aan $y(t) = 0$:

$$3t - t^3 = 0, \Leftrightarrow t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) = 0,$$
$$t = 0 \text{ of } t = \sqrt{3} \text{ of } t = -\sqrt{3}.$$

De bijbehorende punten zijn $c(0) = (1, 0)$, $c(\sqrt{3}) = c(-\sqrt{3}) = (-2, 0)$.

Punten op de y-as voldoen aan $x(t) = 0$:

$$1 - t^2 = 0, \Leftrightarrow (1 - t)(1 + t) = 0,$$
$$t = 1 \text{ of } t = -1.$$

De bijbehorende punten zijn $c(1) = (0, 2)$ en $c(-1) = (0, -2)$.

b *In welke punten is de raakvector aan* C *horizontaal dan wel verticaal?*

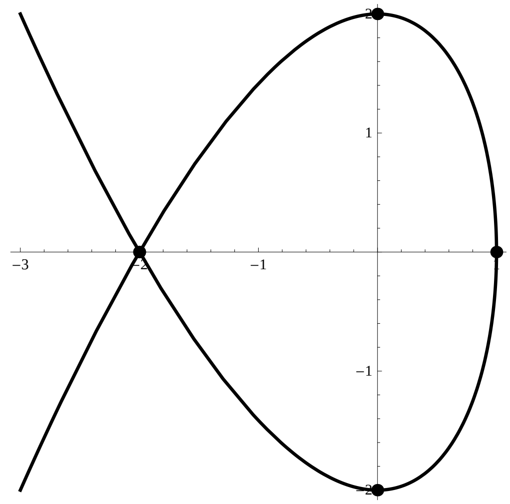
De raakvector in $c(t)$ wordt gegeven door $c'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-2t, 3 - 3t^2)$. Deze loopt horizontaal als

$$y'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1 - t)(1 + t) = 0,$$

dat wil zeggen, als $t = 1$ of $t = -1$. De bijbehorende punten zijn $c(1) = (0, 2)$ en $c(-1) = (0, -2)$.

De raakvector loopt verticaal als $x'(t) = -2t = 0$, oftewel als $t = 0$. Het bijbehorende punt is $c(0) = (1, 0)$.

c *Schets C.*



d *Is de functie c in het punt $t = \sqrt{3}$ differentieerbaar? Zo ja, wat is de afgeleide?*
De componenten $x(t)$ en $y(t)$ zijn differentieerbare functies (zelfs polynomen). Dan is $c(t)$ ook differentieerbaar.

$$c'(\sqrt{3}) = (-2\sqrt{3}, 3 - 3 \cdot 3) = (-2\sqrt{3}, -6).$$

2. *Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven worden door*

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{10}\right)^2,$$

a *Geef de vergelijking van de raaklijn aan de hoogtelijn $f(x, y) = 1$ in het punt $(x, y) = (4, 6)$.*
We berekenen

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{25}x \\ \frac{1}{50}y \end{pmatrix}, \qquad \nabla f(4, 6) = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} \\ \frac{3}{25} \end{pmatrix}.$$

De raaklijn door $(4, 6)$ aan de hoogtelijn van f heeft $\nabla f(4, 6)$ als normaalvector. De vergelijking voor de lijn is daarom

$$0 = \nabla f(4, 6) \cdot \begin{pmatrix} x - 4 \\ y - 6 \end{pmatrix} = \frac{8}{25}(x - 4) + \frac{3}{25}(y - 6).$$

Vereenvoudigen levert

$$8x + 3y = 50.$$

b *In welk punt (a, b) van de hoogtelijn $f(x, y) = 1$ heeft de raaklijn aan de hoogtelijn een normaalvector die een veelvoud is van $\mathbf{n} = (3, 4)$?*

We zoeken een punt (a, b) op de hoogtelijn zodanig dat $\nabla f(a, b) = \lambda\mathbf{n}$. Oftewel, we zoeken a, b en λ die aan de volgende vergelijkingen voldoen:

$$\left(\frac{a}{5}\right)^2 + \left(\frac{b}{10}\right)^2 = 1$$
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{25}a \\ \frac{1}{50}b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

We vinden eerst

$$a = \frac{75}{2}\lambda, \qquad b = 200\lambda.$$

Invullen in de vergelijking voor de hoogtelijn geeft

$$\left(\frac{15}{2}\lambda\right)^2 + (20\lambda)^2 = 1$$

oftewel

$$\lambda^2 = \frac{4}{1825}.$$

Dit levert

$$\lambda = \frac{2}{365}\sqrt{73}, \quad a = \frac{15}{73}\sqrt{73}, \quad b = \frac{80}{73}\sqrt{73}, \qquad \text{of}$$
$$\lambda = -\frac{2}{365}\sqrt{73}, \quad a = -\frac{15}{73}\sqrt{73}, \quad b = -\frac{80}{73}\sqrt{73}.$$

3. *Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door*

$$f(x, y) = -x^3 + y^2 - 6xy.$$

a *Bepaal de kritieke punten van f.*

Kritieke punten van f zijn de punten die voldoen aan $\nabla f(x, y) = 0$, oftewel

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -3x^2 - 6y \\ 2y - 6x \end{pmatrix} = 0.$$

Dit levert

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = 3x \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 + 6x = 0 \\ y = 3x \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \text{ of } x = -6 \\ y = 3x, \end{cases}$$

en de kritieke punten zijn $(x, y) = (0, 0)$ en $(x, y) = (-6, -18)$.

b *Ga voor elk kritiek punt na of er een lokaal maximum of een lokaal minimum wordt aangenomen.*

We berekenen eerst

$$D(x,y) = \det Hf = \det \begin{pmatrix} -6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = -12x - 36.$$

Omdat $D(0,0) = -36 < 0$ wordt er in $(0,0)$ geen extremum aangenomen.
We zien verder dat $D(-6,-18) = 72 - 36 = 36 > 0$; in $(-6,-18)$ wordt er wel een extremum aangenomen. Aan de ongelijkheid

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-6,-18) = 36 > 0$$

zien we dat dit een lokaal minimum is.