Wiskunde AEO III
Uitwerking tentamen, maandag 29 maart 2004.

Onderdeel 2: analyse

1 **a** *Bereken*

$$\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x.$$

b *Bereken*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2}{x^3 + x^2 - x - 1} \, \mathrm{d}x.$$

c *Bereken*

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, \mathrm{d}x.$$

a De integraal is oneigenlijk, omdat de integrand niet is gedefiniëerd in 0:

$$\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 x \ln x \, \mathrm{d}x$$

Partiële integratie met $u' = x$ en $v = \ln x$:

$$\int_a^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln x \,\Big|_a^1 - \frac{1}{2}\int_a^1 x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}a^2 \ln a - \frac{1}{4}x^2 \,\Big|_a^1 = -\frac{1}{2}a^2 \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}.$$

Neem de limiet, en merk op dat $\lim_{a \downarrow 0} a^2 \ln a = 0$ een standaardlimiet is:

$$\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{a \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2}a^2 \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \right) = -\frac{1}{4}.$$

b Factoriseer eerst de noemer van de integrand:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2.$$

Schrijf de integrand om door de breuk te splitsen:

$$\frac{4x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Vermenigvuldig links en rechts met de noemer van de integrand:

$$4x^2 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) = (A+B)x^2 + (2A+C)x + A - B - C$$

Door de coëfficiënten links en rechts met elkaar te vergelijken, vinden we de volgende condities voor A, B en C:

$$A + B = 4, \qquad 2A + C = 0, \qquad A - B - C = 0.$$

De eerste twee leveren $C=-2A$ en $B=4-A$; substitutie in de derde vergelijking levert vervolgens $A-4+A+2A=0$, ofwel $A=1$. We hebben gevonden dat

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\ln|x-1|+3\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \ln|\frac{1}{2}|+3\ln\left|\frac{3}{2}\right|+\frac{4}{3}-\ln 1-\ln 1-2 \\ &= -\ln 2+3\ln 3-3\ln 2-\frac{2}{3} \\ &= \ln\frac{27}{16}-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3 We halen eerst de factor 16 onder de wortel vandaan:

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^4 \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nu substitueren we $(x/4)=\sin t$, ofwel $x=4\sin t$, met $\mathrm{d}x=4\cos t\,\mathrm{d}t$. Dan krijgen we (let op de grenzen):

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 4\cos t\,\mathrm{d}t = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t;$$

merk op dat op het integratieinterval $|\cos t|=\cos t$:

$$\begin{aligned}&=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=8\frac{\pi}{2}=4\pi.\end{aligned}$$

2 *Laat $y:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie zijn, waarvoor geldt dat $y(0)=1$ en*

$$y'(x)=-y(x)^2,$$

voor alle x. Bereken $y(1)$.

We delen links en rechts door $y(x)^2$ en integreren van 0 naar x:

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \,\mathrm{d}t.$$

Nieuwe variabele $u=y(t)$:

$$-x=-\int_0^x \,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\frac{1}{u}\,\Big|_1^{y(x)}=1-\frac{1}{y(x)}.$$

Dit levert:

$$y(x) = \frac{1}{1+x}.$$

We lezen af dat $y(1) = \frac{1}{2}$.

3 **a** *Convergent of divergent? Bewijs je antwoord:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

b *Bewijs met de integraaltest dat de volgende reeks convergeert:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

c *Bepaal de convergentiestraal van de volgende reeks met de ratio-test:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3n^2+1} x^{2n}.$$

d *Geef het tweede orde Taylorpolynoom van $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ rond $x = 0$. Geef hiermee een benadering van $\sqrt{1.1}$. Hoe nauwkeurig is deze benadering?*

a Dit is een alternerende reeks met algemene term $(-1)^n a_n = (-1)^n/(2n+1)$. De reeks a_n is monotoon dalend, omdat

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} > 0.$$

Tenslotte is

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Van alternerende reeksen met deze eigenschappen weten we dat ze convergeren.

b Laat $f(x) = x^{-2}\ln(x)$. Dan is

$$f'(x) = -2x^{-3}\ln(x) + x^{-3} = x^{-3}(1 - 2\ln x).$$

Dit is negatief als $\ln x > \frac{1}{2}$, ofwel $x > e^{\frac{1}{2}}$. Dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{3} \frac{\ln n}{n^2} + \int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, \mathrm{d}x.$$

De integraal kunnen we uitrekenen met partiële integratie:

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x \Big|_3^{\infty} + \int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{x}\Big|_3^{\infty} = \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{3}.$$

De integraal is convergent; volgens de integraaltest is dan de reeks ook convergent.

c De algemene term van de reeks is

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3n^2+1} x^{2n};$$

voor de ratio-test berekenen we:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{3(n+1)^2+1}x^{2n+2}\right| \left|\frac{3n^2+1}{(-1)^n 2^n x^{2n}}\right| = \frac{3n^2+1}{3(n+1)^2+1}2x^2,$$

en

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2x^2.$$

Volgens de ratio-test divergeert de reeks als $2x^2 > 1$, dus als $|x| > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en convergeert de reeks als $2x^2 < 1$, dus als $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dit levert dat de convergentiestraal R gelijk is aan

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

d Voor het tweede orde Taylorpolynoom hebben we de eerste twee afgeleides van $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ nodig:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Het tweede orde Taylorpolynoom rond $x = 0$ is dan

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}. \end{aligned}$$

Hiermee berekenen we de benadering $T_2(0.1)$ van $\sqrt{1.1}$:

$$T_2(0.1) = 1 + 0.05 - 0.00125 = 1.04875.$$

We weten dat als $|f^{(3)}(x)| < M$ voor alle $x \in [0, 0.1]$, dat dan voor alle $x \in [0, 0.1]$ geldt dat:

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_2(x)| \leq M\frac{x^3}{3!},$$

De derde afgeleide van f is gelijk aan $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$, en omdat dit een dalende functie is, is de ‘zuinigste’ waarde die we voor M kunnen nemen gelijk aan $f^{(3)}(0) = 3/8$. De formule levert dan

$$|f(0.1) - T_2(0.1)| \leq \frac{3}{8}\frac{0.001}{6} = \frac{0.001}{16} = \frac{1}{16000}.$$